

Matematică pentru clasa a VI-a

Metode explicite de rezolvare
pentru
principalele tipuri de exerciții

Editura Booklet
www.booklet.ro

Pentru comenzi:
tel: 021 430. 3095
021 440. 1002
e-mail: comenzi@booklet.ro

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Matematică : clasa a VI-a : metode explicite de rezolvare pentru
principalele tipuri de exerciții. - Ed. a 2-a, rev. - București :
Booklet, 2018
ISBN 978-606-590-602-0

51

Redactor: Alexandru Ghiță, Mihail Săndulescu
Copertă: Andreea Alexandra Vraja

©Editura Booklet 2018
Toate drepturile asupra lucrării aparțin editurii

ALGEBRĂ

Capitolul I. Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale.

1. Mulțimi: descriere, notații, reprezentări. Mulțimi numerice/nenumerică. Relația dintre un element și o mulțime.

Exercițiul 3, pagina 12

b) Observăm faptul că elementele mulțimii sunt numere naturale pătrate perfecte mai mici sau egale cu 81. Aceste numere reprezintă rezultatul înmulțirii unui număr cu el însuși. De exemplu, $4 = 2 \cdot 2$, sau $9 = 3 \cdot 3$. Rescriem mulțimea, folosindu-ne de această proprietate comună, astfel:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = k^2, \text{ unde } k \in \mathbb{N}, k \leq 9\}.$$

Exercițiul 25, pagina 15

Împărțind un număr natural la 9 se obțin câturile: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Așadar mulțimea cerută este compusă din toate numerele naturale care, la împărțirea cu 9, dau câtul 7 și resturile 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Soluția problemei se obține calculând $9 \cdot 7 + 0, 9 \cdot 7 + 1, \dots, 9 \cdot 7 + 8$ (folosim *Teorema împărțirii cu rest*). Astfel, mulțimea cerută va fi $\{63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71\}$.

Exercițiul 32, pagina 16

Elementele unei mulțimi sunt distincte. Suma celor mai mici 11 numere naturale distincte este 55. ($0 + 1 + 2 + \dots + 10 = 55$). Astfel, tragem concluzia că cele 11 numere cerute sunt 0, 1, 2, 3, 4, ..., 10. Produsul acestor numere va fi $0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 10$. Deoarece înmulțirea numerelor naturale este asociativă, iar unul din termenii produsului este zero, rezultatul înmulțirii va fi zero.

Exercițiul 33, pagina 16

a) Avem de calculat suma $2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 100$. Observăm că termenii sumei sunt numere pare. Dăm factor comun 2, obținem $2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 50)$. Pentru calculul sumei $1 + 2 + 3 + \dots + 50$ se aplică formula lui Gauss ($1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$) și se obține $1 + 2 + 3 + \dots + 50 = 2 \cdot \frac{50 \cdot 51}{2} = 50 \cdot 51 = 2550$.

b) Observăm faptul că fiecare termen al mulțimii este cu 3 mai mare decât termenul precedent. Astfel, $1 = 1 + 3 \cdot 0$, $4 = 1 + 3 \cdot 1$, $7 = 1 + 3 \cdot 2$, $\dots$, $91 = 1 + 3 \cdot 30$. Din acest mod de scriere a elementelor mulțimii se observă că mulțimea are 31 de elemente. $1 + 4 + 7 + 10 + \dots + 91 = (1 + 3 \cdot 0) + (1 + 3 \cdot 1) + (1 + 3 \cdot 2) + (1 + 3 \cdot 3) + \dots + (1 + 3 \cdot 30) = \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{\text{de 31 de ori}} + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \dots + 3 \cdot 30 = 1 \cdot 31 + 3 \cdot (1 + 2 + \dots + 30) = 31 + 3 \cdot \frac{30 \cdot 31}{2} = 31 + 3 \cdot 465 = 31 \cdot (1 + 3 \cdot 15) = 31 \cdot 46 = 1426$.

c) Notăm $S = 1 + 2^1 + \dots + 2^{19}$. Atunci :

$2 \cdot S = 2 \cdot (1 + 2^1 + \dots + 2^{19}) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2^1 + \dots + 2 \cdot 2^{19} = 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{20}$ și $2 \cdot S - S = (2^1 + 2^2 + \dots + 2^{20}) - (1 + 2^1 + \dots + 2^{19}) = 2^{20} - 1$. Așadar, $S = 2^{20} - 1$ și obținem $2^0 + 2^1 + \dots + 2^{19} = 2^{20} - 1$.

2. Relații între mulțimi.

Exercițiul 1, pagina 17

g) Expresia nu este corect scrisă, deoarece relația de apartenență se realizează între un element și o mulțime, iar $\{5\}$ nu este element al mulțimii A, este o submulțime a mulțimii A (elementul 5 face parte din mulțimea A). O modalitate corectă de scriere a expresiei ar fi: $5 \in A$ sau $\{5\} \subset A$.

Exercițiul 13, pagina 19

Unghiurile improprii sunt unghiurile cu măsura egală cu 0° sau 180° , deci $A = \{0^\circ, 180^\circ\}$. Submulțimile mulțimii A vor fi $\emptyset$, $\{0^\circ\}$, $\{180^\circ\}$, $\{0^\circ, 180^\circ\}$.

Exercițiul 30, pagina 21

Mulțimile A și B sunt egale dacă au aceleași elemente. Se deduce faptul că numărul natural x va avea valoarea 2.

Exercițiul 32, pagina 21

Cum $\{a - 2, 1, 2\}$ este o mulțime și elementele unei mulțimi sunt distincte, deducem că $a - 2$ nu poate fi 1 sau 2. Din relația $\{1, 2, 3, 4, 5\} \supset \{a - 2, 1, 2\}$, obținem că $a - 2 = 3$ sau $a - 2 = 4$ sau $a - 2 = 5$. Dacă $a - 2 = 3$, atunci $a = 2 + 3$, deci $a = 5$. Dacă $a - 2 = 4$, atunci $a = 2 + 4$, deci $a = 6$. Dacă $a - 2 = 5$, atunci $a = 2 + 5$, deci $a = 7$, așadar a poate avea valorile 5, 6 sau 7.

Exercițiul 37, pagina 22

b) Două mulțimi sunt egale dacă au aceleași elemente. Cum numerele x și y sunt naturale, avem că $x + y \leq x + 2y$, deci $x + y = 8$, $x + 2y = 13$ și $3x + 4y = 29$.

$$x + 2y = 13 \Leftrightarrow \underbrace{x + y}_8 + y = 13 \Leftrightarrow 8 + y = 13 \Leftrightarrow y = 13 - 8 \Leftrightarrow y = 5.$$

Înlocuind y cu 5 în relația $x + y = 8$, obținem $x + 5 = 8$, de unde
 $x = 8 - 5$, $x = 3$.

Verificăm acum cea de-a treia relație, $3x + 4y = 29$.

$$3 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 9 + 20 = 29.$$

Numerele căutate sunt $x = 3$ și $y = 5$.

Exercițiul 42, pagina 22

d) Mulțimea A conține numerele naturale care prin împărțire la 5 dau restul 2. Aplicând teorema împărțirii cu rest, obținem că elementele mulțimii A sunt de forma $5n + 2$, $n \in \mathbb{N}$. Ultima cifră a elementelor mulțimii A este 2 sau 7. Ultima cifră a unui pătrat perfect poate fi 0, 1, 2, 4, 5, 6 sau 9. Cum nu există pătrate perfecte cu ultima cifră 2 sau 7, mulțimea A nu conține pătrate perfecte.

Exercițiul 44, pagina 23

- a) Mulțimea A are n elemente, deci va avea n submulțimi cu un singur element.
- b) Pentru a obține o submulțime cu $n - 1$ elemente a mulțimii A, trebuie să eliminăm din A un element. Conform pct a), există n astfel de posibilități. Deci numărul de submulțimi cu $n - 1$ elemente ale mulțimii A este egal cu numărul de submulțimi cu un element, adică n .

c) Submulțimile cu două elemente ale mulțimii A sunt :

$\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, n\}$, $\leftarrow n - 1$ submulțimi

$\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, n\}$, $\leftarrow n - 2$ submulțimi

$\{3, 4\}$, $\{3, 5\}$, $\{3, n\}$, $\leftarrow n - 3$ submulțimi

..... ș.a.m.d.

$\{n - 2, n - 1\}$, $\{n - 2, n\}$, $\leftarrow 2$ submulțimi

$\{n - 1, n\}$, $\leftarrow 1$ submulțime

adică $(n - 1) + (n - 2) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$ submulțimi (pentru calculul sumei am folosit *formula lui Gauss*).

3. Mulțimi finite. Cardinalul unei mulțimi finite. Mulțimi infinite. Mulțimea numerelor naturale.

Exercițiul 2, pagina 23

c) Mulțimea B conține toate numerele naturale de două cifre. $B = \{10, 11, 12, 13, \dots, 99\}$. Calculăm numărul de elemente al mulțimii: $99 - 10 + 1 = 90$. Cardinalul mulțimii B este 90.

Exercițiul 4, pagina 24

l) Numărul de elemente ale mulțimii A este egal cu $2^{101} - 2^{100} + 1$. Dăm factor comun pe 2^{100} , obținem $2^{100}(2 - 1) + 1$. Răspunsul va fi $2^{100} + 1$.

Exercițiul 8, pagina 24

b) Numerele a și $a + 1$ sunt diferite. Cum $\text{card}(A) = 2$ (A are 2 elemente), obținem că $\{a, a + 1\} = \{2a + 1, 3a\}$, adică $a = 2a + 1$ și $a + 1 = 3a$ sau $a = 3a$ și $a + 1 = 2a + 1$. Pentru $a = 0$, $A = \{0, 1\}$.

4. Operații cu mulțimi.

Exercițiul 12, pagina 29

e) Determinăm reuniunea mulțimilor B și C , $B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, apoi, intersecția mulțimii A cu mulțimea $B \cup C$ va fi mulțimea $\{2, 3, 4\}$.

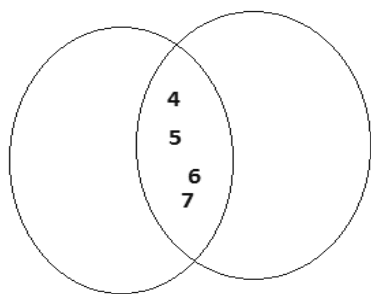
Exercițiul 20, pagina 30

Mulțimea A poate fi formată atât din elementele a, b, c , cât și din elementele mulțimii $\{a, b, c\} \setminus \{a\}$, adică b și c .

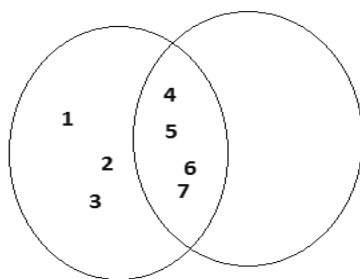
Exercițiul 22, pagina 30

Scriem elementele celor două mulțimi folosind diagramele Venn–Euler. Vom așeza în diagrame întâi elementele din $A \cap B$, apoi elementele din $A \setminus B$.

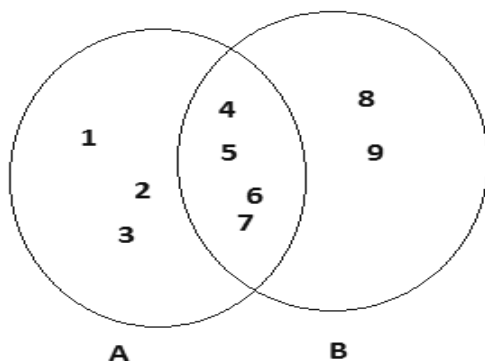
1)

**A B**

2)

**A B**

Observăm că, dintre elementele mulțimii $A \cup B$, nu sunt reprezentate 8 și 9. Acestea nu pot fi în mulțimea A, deoarece nu se află nici în $A \setminus B$, nici în $A \cap B$. Prin urmare sunt în mulțimea B, mai exact în $B \setminus A$.

**A B**

Analizând diagramele, obținem $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ și $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Exercițiul 33, pagina 31

Pentru rezolvarea exercițiului, vom folosi principiul includerii și excluderii.

a) Dintre cei 415 de elevi vorbitori de engleză, o parte vorbesc doar limba engleză, iar restul vorbesc atât limba engleză, cât și limba franceză. De asemenea, dintre cei 270 de elevi vorbitori de limba franceză, o parte vorbesc doar limba franceză, iar restul vorbesc atât franceză, cât și engleză. Astfel, adunând cele două numere, $415 + 270 = 685$, îi vom număra de două ori pe elevii care vorbesc ambele limbi, motiv pentru care obținem un număr mai mare decât numărul elevilor școlii. Pentru a afla câți elevi vorbesc și engleză și

franceză, vom scădea din rezultat numărul elevilor școlii. $685 - 583 = 102$ elevi care vorbesc și engleză, și franceză.

b) Dintre cei 270 de elevi vorbitori de limbă franceză, îi scădem pe cei care vorbesc și limba engleză, și limba franceză. Obținem $270 - 102 = 168$ elevi vorbitori doar de limba franceză.

Exercițiul 46, pagina 32

c) Conform teoremei împărțirii cu rest, $x = 12n + 7$, $n \in \mathbb{N}, n > 0$ ($n > 0$ deoarece x are două cifre). Cel mai mic număr de două cifre care aparține mulțimii A se va obține în cazul în care câtul (n) este minim, adică $n = 1$. În acest caz, $x = 12 \cdot 1 + 7$, deci $x = 19$.

d) Restul împărțirii unui număr din mulțimea A la 3 este 1 ($x = 12n + 7 = 12n + 6 + 1 = 3(4n + 2) + 1$, pentru oricare $x \in A$), iar restul împărțirii unui număr din mulțimea B la 3 este 2 ($x = 15k + 5 = 3(5k + 1) + 2$, pentru oricare $x \in B$). Așadar mulțimile A și B nu au elemente comune.

5. Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime.

Exercițiul 13, pagina 36

Un număr natural este divizibil cu 4 dacă numărul format din ultimele două cifre ale sale e divizibil cu 4. Astfel, numărul $\overline{52x}$ e divizibil cu 4 dacă numărul $\overline{2x}$ e divizibil cu 4, adică $x \in \{0, 4, 8\}$ (Numerele 20, 24, 28 sunt multipli de 4). Numerele cerute sunt 520, 524, 528.

Exercițiul 17, pagina 37

Conform criteriului de divizibilitate cu 9, numărul $\overline{23a4}$ este divizibil cu 9 dacă suma cifrelor sale este multiplu de 9. Cum a este cifră, deci poate lua doar valorile $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, alegem dintre aceste valori pe cele care respectă proprietatea $(2 + 3 + 4 + a) : 9$. Soluția problemei este $a \in \{0, 9\}$.

Exercițiul 31, pagina 38

Observăm că $2890 = 2 \cdot 5 \cdot 17^2$, deci una dintre soluții este $a = 17$, $b = 10$. Dar numărul 2890 mai poate fi scris și ca $1^2 \cdot 2890$. A doua soluție este $a = 1$, iar $b = 2890$.

Exercițiul 32, pagina 38

Metoda 1: Descompunând numărul $\overline{xxx}$ în baza 10, obținem $\overline{xxx} = 111x = 3 \cdot 111 \cdot x$. Dacă x e un număr prim diferit de 3, numărul de divizori naturali ai lui $\overline{xxx}$ este $(1+1)(1+1)(1+1)=8$. Dacă $x=3$, $\overline{xxx} = 111x = 3^2 \cdot 111$ și numărul de divizori naturali ai lui $\overline{xxx}$ este $(2+1)(1+1)=6$.

Metoda 2: Numerele prime de o cifră sunt 2, 3, 5, 7. Descompunem în factori primi numerele 222, 333, 555, 777. Obținem, pe rând, $2 \cdot 3 \cdot 37$, $3^2 \cdot 37$, $5 \cdot 3 \cdot 37$, $7 \cdot 3 \cdot 37$. Pentru $x \in \{2, 5, 7\}$, avem 8 divizori naturali, iar pentru $x = 3$, 6 divizori naturali.

Exercițiul 33, pagina 38

Numărul $\overline{xyzxyz}$ poate fi scris ca $\overline{xyz} \cdot 1001$. Descompunându-l pe 1001 în factori primi, obținem $\overline{xyzxyz} = \overline{xyz} \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Știind că $\overline{xyz}$ este număr prim, calculăm numărul de divizori naturali ai lui $\overline{xyzxyz}$, ca fiind egal cu $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

6. Cel mai mare divizor comun (c.m.m.d.c). Numere prime între ele.

Exercițiul 7, pagina 39

Observăm, cu ajutorul criteriilor de divizibilitate cunoscute, faptul că $85 : 5$, $78 : 3$, și $91 : 7$. Tragem concluzia că buchetele de trandafiri vor avea câte 5 flori, buchetele de gladiole vor avea câte 3 flori, iar buchetele de frezii vor avea câte 7 flori. Vom avea $85 : 5 = 17$ buchete de trandafiri, $78 : 3 = 26$ buchete de gladiole, $91 : 7 = 13$ buchete de frezii. Numărul total de buchete de flori va fi $17 + 26 + 13 = 56$.

Exercițiul 9, pagina 39

e) Descompunem numerele în produs de puteri de numere prime și obținem $45 = 3^2 \cdot 5$, $72 = 2^3 \cdot 3^2$, $54 = 2 \cdot 3^3$. Alegem factorii comuni la exponentul cel mai mic din cele trei descompuneri și îi înmulțim. Obținem $(45 ; 72 ; 54) = 3^2 = 9$.

Exercițiul 13, pagina 40

Numerele prime între ele sunt numerele care nu au divizori comuni diferiți de 1. Dorim să aflăm care sunt numerele naturale fără divizori comuni a căror sumă este 8. Din faptul că suma numerelor este 8, iar numerele sunt naturale, deducem că cele două numere sunt mai mici decât 8, deci aparțin mulțimii $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Perechile de numerele prime între ele a căror sumă este egală cu 8 sunt $(1, 7)$, $(7, 1)$, $(3, 5)$, $(5, 3)$.

Exercițiul 15, pagina 40

Dacă un număr natural este divizibil cu 6, atunci va fi divizibil cu 2 și cu 3.

Numărul $\overline{5x3y}$ e divizibil cu 6, deci e divizibil cu 2 și cu 3.

Cum $\overline{5x3y}$ e divizibil cu 2, obținem că y poate fi 0, 2, 4, 6, 8.

Pentru fiecare valoare a lui y , determinăm valorile lui x astfel încât numărul $\overline{5x3y}$ să fie divizibil cu 3. Un număr natural e divizibil cu 3 dacă suma cifrelor sale e un număr divizibil cu 3.

Dacă $y = 0$, $\overline{5x30} : 3 \Leftrightarrow (5 + x + 3 + 0) : 3 \Leftrightarrow (8 + x) : 3 \Leftrightarrow x \in \{1, 4, 7\}$. Se obțin numerele 5130, 5430, 5730.

Dacă $y = 2$, $\overline{5x32} : 3 \Leftrightarrow (5 + x + 3 + 2) : 3 \Leftrightarrow (10 + x) : 3 \Leftrightarrow x \in \{2, 5, 8\}$. Se obțin numerele 5232, 5532, 5832.

Dacă $y = 4$, $\overline{5x34} : 3 \Leftrightarrow (5 + x + 3 + 4) : 3 \Leftrightarrow (12 + x) : 3 \Leftrightarrow x \in \{0, 3, 6, 9\}$. Se obțin numerele 5034, 5334, 5634, 5934.

Dacă $y = 6$, $\overline{5x36} : 3 \Leftrightarrow (5 + x + 3 + 6) : 3 \Leftrightarrow (14 + x) : 3 \Leftrightarrow x \in \{1, 4, 7\}$. Se obțin numerele 5136, 5436, 5736.

Dacă $y = 8$, $\overline{5x38} : 3 \Leftrightarrow (5 + x + 3 + 8) : 3 \Leftrightarrow (16 + x) : 3 \Leftrightarrow x \in \{2, 5, 8\}$. Se obțin numerele 5238, 5538, 5838.

Exercițiul 16, pagina 40

Vom folosi teorema împărțirii cu rest ($433 : n = a \text{ rest } 8$, $n > 8$ și $617 : n = b \text{ rest } 5$, $n > 5$. Așadar $433 = an + 8$, $617 = bn + 5$, $n > 8$, de unde $433 - 8 = an$ și $617 - 5 = bn$, $n > 8$). Numărul n este un divizor comun mai mare decât 8 al numerelor 425 ($433 - 8$) și 612 ($617 - 5$). Descompunem în produs de puteri de numere prime numerele 425 și 612 și obținem: $425 = 5^2 \cdot 17$, $612 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 17$. Tragem concluzia că soluția problemei este $n = 17$.

Exercițiul 22, pagina 40

Scriem cele trei împărțiri:

$251 : n = a \text{ rest } 11$, $n > 11$, $379 : n = b \text{ rest } 19$, $n > 19$ și $557 : n = c \text{ rest } 17$, $n > 17$. Aplicând teorema împărțirii cu rest, obținem $251 = a \cdot n + 11$, $379 = b \cdot n + 19$, $557 = c \cdot n + 17$, cu $n > 19$, de unde $251 - 11 = a \cdot n$, $379 - 19 = b \cdot n$, $557 - 17 = c \cdot n$, cu $n > 19$. Observăm că n divide numerele 240, 360 și 540, deci va divide și cel mai mare divizor comun al acestora. Descompunând numerele în produs de puteri de numere prime, obținem: $240 = 2^4 \cdot 5 \cdot 3$, $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, $540 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ și $(240, 360, 540) = 2^2 \cdot 5 \cdot 3 = 60$. Așadar n este un divizor natural mai mare decât 19 al numărului 60. Valorile lui n sunt: 20, 30, 60.

Exercițiul 37, pagina 41

a) Fie d un divizor comun al numerelor $5n + 3$ și $7n + 4$. Folosim proprietățile relației de divizibilitate în rezolvarea problemei. Una din proprietăți spune că, în cazul în care un număr natural d este divizorul altui număr natural n , atunci d este divizorul tuturor multiplilor naturali ai numărului n . Altfel spus, dacă $d \mid n$, atunci $d \mid kn$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $d, n \in \mathbb{N}$. Astfel, dacă $d \mid 5n + 3$, atunci $d \mid (5n + 3) \cdot 7$, și dacă $d \mid 7n + 4$, atunci $d \mid (7n + 4) \cdot 5$. De asemenea, cunoaștem proprietatea: Dacă $a \mid b$ și $a \mid c$, atunci $a \mid (b + c)$ și $a \mid (b - c)$, $a, b, c \in \mathbb{N}$. Atunci $d \mid [(5n + 3) \cdot 7 - (7n + 4) \cdot 5]$, deci $d \mid 1$, de unde rezultă $d = 1$. Cum $d = 1$, numerele $5n + 3$ și $7n + 4$ sunt prime între ele.

7. Cel mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c).

Exercițiul 2, pagina 42

Cerința problemei este de a identifica cel mai mic multiplu comun al numerelor date. Descompunem în produs de puteri de numere prime și obținem $24 = 2^3 \cdot 3$, $56 = 2^3 \cdot 7$, $72 = 2^3 \cdot 3^2$. Alegem factorii comuni și necomuni la exponentul cel mai mare și îi înmulțim. Obținem $[24; 56; 72] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 504$.

Exercițiul 6, pagina 43

Se știe că $(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$. Astfel obținem că $a \cdot b = 15 \cdot 360$. Cum $(a, b) = 15$, deducem că există numerele naturale prime între ele, x și y , astfel încât $a = 15 \cdot x$, $b = 15 \cdot y$. Relația $a \cdot b = 15 \cdot 360$ devine $15 \cdot x \cdot 15 \cdot y = 15 \cdot 360$, adică $x \cdot y = 24$. De aici, $x = 1$ și $y = 24$ sau $x = 3$ și $y = 8$ sau $x = 24$ și $y = 1$ sau $x = 8$ și $y = 3$. Numerele căutate sunt $a = 15$ și $b = 360$ sau $a = 45$ și $b = 120$ sau $a = 360$ și $b = 15$ sau $a = 120$ și $b = 45$.

Exercițiul 12, pagina 43

Notăm cu x numărul căutat. Observăm faptul că, la scăderea lui 121 (restul) din x , obținem un număr care se împarte exact la 280, 490 și 350. Cum numărul căutat trebuie să fie cel mai mic, deducem că trebuie găsit cel mai mic multiplu comun al numerelor 280, 490 și 350. Descompunem numerele în produs de puteri de numere prime: $280 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$ și $490 = 2 \cdot 5 \cdot 7^2$, iar $350 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7$. *C.m.m.m.c.* este produsul factorilor comuni și necomuni, luați o singură dată la exponentul cel mai mare.

Obținem $[280 ; 490 ; 350] = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 8 \cdot 25 \cdot 49 = 9800$.

Răspunsul problemei este $x = 9800 + 121 = 9921$.

Exercițiul 16, pagina 43

Fie n numărul căutat. Scriem împărțirile astfel:

$$n : 56 = a \text{ rest } 53, n : 50 = b \text{ rest } 47, n : 21 = c \text{ rest } 18.$$

Aplicăm *teorema împărțirii cu rest*:

$$n = 56 \cdot a + 53, n = 50 \cdot b + 47, n = 21 \cdot c + 18.$$

Observăm că diferența dintre fiecare împărțitor și restul corespunzător este 3. Adunând 3 la ambii membri ai celor trei egalități obținem: $n + 3 = 56a + 53 + 3$, $n + 3 = 50b + 47 + 3$, $n + 3 = 21c + 18 + 3$, adică $n + 3 = 56a + 56$, $n + 3 = 50b + 50$, $n + 3 = 21c + 21$ și, de aici, $n + 3 = 56(a + 1)$, $n + 3 = 50(b + 1)$, $n + 3 = 21(c + 1)$. Așadar, $n + 3$ e divizibil cu 56, 50 și 21. Cum n este cel mai mic cu proprietatea din enunț, $n + 3$ este cel mai mic multiplu comun al numerelor 56, 50, și 21. Descompunem numerele în produs de puteri de numere prime: $56 = 2^3 \cdot 7$ și $50 = 2 \cdot 5^2$, iar $21 = 3 \cdot 7$. *C.m.m.m.c.* este produsul factorilor comuni și necomuni, luați o singură dată la exponentul cel mai mare.

Obținem $[56 ; 50 ; 21] = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 3 \cdot 7 = 8 \cdot 25 \cdot 3 \cdot 7 = 4200$. Concluzia este că $n + 3 = 4200$ și $n = 4197$.

8. Proprietăți ale relației de divizibilitate în $\mathbb{N}$.

Exercițiul 1, pagina 45

j) Observăm că putem da factor comun în paranteză pe 143. Obținem $143 \mid 143 \cdot (a + b - c)$. Știm din ipoteză $a + b \geq c$, deci $(a + b - c) \geq 0$ număr natural. Cum $143 \mid 143$, și știind că $d \mid n \Rightarrow d \mid kn, \forall k \in \mathbb{N}, d, n \in \mathbb{N}$, rezultă că propoziția este adevărată.

Exercițiul 5, pagina 45

Cunoaștem proprietatea: $a \mid b$ și $b \mid a \Rightarrow a = b, \forall a, b \in \mathbb{N}$. Deducem de aici faptul că $2x - 1 = x + 3$. Rezolvăm ecuația și obținem $x = 4$.

Exercițiul 7, pagina 46

Fie $\overline{ab}, a, b \in \mathbb{N}, a \neq 0$ un număr de două cifre. Numărul $\overline{ab}$ mai poate fi scris și sub forma $10a + b$. Răsturnatul său, $\overline{ba}$, se poate scrie ca $10b + a$. Astfel, suma $\overline{ab} + \overline{ba}$ devine $10a + b + 10b + a = 11a + 11b = 11(a + b)$. Cum $11 \mid 11$, deducem că $11 \mid 11(a + b)$, de unde reiese faptul că rezultatul sumei dintre un număr natural de două cifre și răsturnatul acelui număr este divizibil cu 11.

Exercițiul 9, pagina 46

Pentru ca numărul n să fie divizibil cu 5, trebuie ca ultima lui cifră să fie sau 0, sau 5. Prin înmulțiri succesive ale numerelor 6 și 111 cu ele însele, deducem faptul că ultima cifră a lui 6^{25} este 6, iar ultima cifră a lui 111^3 este 1. Reiese faptul că ultima cifră a diferenței lor va fi $6 - 1 = 5$, deci numărul n , având ultima cifră 5, este divizibil cu 5.

Exercițiul 18, pagina 46

Șase puteri consecutive ale lui 2 sunt $2^n, 2^{n+1}, 2^{n+2}, 2^{n+3}, 2^{n+4}, 2^{n+5}$. Suma lor este $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} + 2^{n+3} + 2^{n+4} + 2^{n+5}$. Dăm factor comun pe 2^n și obținem $2^n(1 + 2 + 3 + 4 + 8 + 16 + 32)$. După efectuarea calculelor, suma devine $63 \cdot 2^n$. Cum $63 : 7$ și $63 : 9$, rezultă că $(63 \cdot 2^n) : 9$ și $(63 \cdot 2^n) : 7$, deci suma a șase puteri consecutive ale lui 2 se divide cu 9 și 7.

Capitolul II. Rapoarte și proporții.

1. Rapoarte

Exercițiul 15, pagina 50

Pentru a calcula raportul cerut, trebuie ca lungimile laturilor celor două pătrate să fie exprimate cu aceeași unitate de măsură. Folosind faptul că $1\text{ m}=100\text{ cm}$, obținem că $\frac{3}{5}$ metri sunt echivalentul a $0,6\text{ m}=(0,6 \cdot 100)\text{ cm} = 60\text{ cm}$. Notăm cu P_1 perimetrul primului pătrat și cu P_2 perimetrul celui de-al doilea pătrat. P_1 este egal cu $(25 \cdot 4)\text{ cm}$, iar $P_2 = (60 \cdot 4)\text{ cm}$. Valoarea raportului $\frac{P_2}{P_1}$ este $\frac{60 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{60}{25} = 2,4$.

Exercițiul 18, pagina 50

Scara hărții = $\frac{\text{Distanța de pe hartă}}{\text{Distanța reală}}$. Exprimând cele două distanțe cu aceeași unitate de măsură ($25\text{ km} = 2500000\text{ cm}$), obținem că scara respectivei hărți este $\frac{4}{2500000} = \frac{1}{625000}$.

Exercițiul 25, pagina 50

Pentru ca raportul să aibă valoarea număr natural, trebuie ca numărul $(x - 3)$ să îl dividă pe 7. Cum 7 este număr prim, singurii săi divizori sunt 1 și el însuși. Rezultă de aici că $x \in \{4 ; 10\}$.

Exercițiul 36, pagina 51

Concentrația unei soluții se calculează folosind formula $\frac{\text{masa substanței dizolvate}}{\text{masa soluției}}$. Masa soluției se obține adunând cantitatea de apă distilată cu masa de sare ce s-a dizolvat în apă. Obținem $220 + 30 = 250\text{g}$ de soluție. Concentrația soluției va fi $\frac{30}{250} = \frac{3}{25} = \frac{12}{100} = 12\%$.

Exercițiul 46, pagina 52

Se observă că numărătorul fiecărei fracții este diferența dintre factorii produsului de la numitor. Folosindu-ne de acest lucru, obținem

$$\begin{aligned} a &= \frac{2-1}{1 \cdot 2} + \frac{3-2}{2 \cdot 3} + \frac{4-3}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{50-49}{50 \cdot 49} = \frac{2}{1 \cdot 2} - \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{3}{2 \cdot 3} - \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{4}{3 \cdot 4} - \\ &- \frac{3}{3 \cdot 4} \dots + \frac{50}{50 \cdot 49} - \frac{49}{50 \cdot 49} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{49} + \frac{1}{49} - \\ &- \frac{1}{50} = 1 - \frac{1}{50} = \frac{49}{50}. \end{aligned}$$

Analog calculăm și b , și obținem $b = \frac{49}{50}$. Cum $a = b$, raportul $\frac{a}{b} = 1$.

2. Proporții. Proprietatea fundamentală a proporțiilor. Aflarea unui termen necunoscut dintr-o proporție

Exercițiul 4, pagina 53

Folosim proprietatea fundamentală a proporțiilor, și anume produsul mezilor este egal cu produsul extremilor. Obținem $a \cdot b = 3 \cdot 5$, deci $a \cdot b = 15$. Atunci $4ab$ va fi egal cu $4 \cdot 15$, $4ab = 60$.

Exercițiul 8, pagina 53

Fie $\overline{ab}$ număr de două cifre în baza 10, $a \neq 0$. Atunci $\frac{a-b}{a+b} = \frac{2}{3}$. Folosind proprietatea fundamentală a proporțiilor, obținem $3a - 3b = 2a + 2b$. Cum a, b , numere naturale, $a \neq 0$, reiese că $a = 5b$. Deducem că $a = 1$ și $b = 5$, deci numerele căutate vor fi 15 și 51.

Exercițiul 16, pagina 53

Putem scrie numărul $\overline{ab}$ ca $10a + b$, și numărul $\overline{ba}$ ca $10b + a$. Proporția devine $\frac{10a+b}{4} = \frac{10b+a}{7}$. Folosind proprietatea fundamentală a proporțiilor, obținem ecuația $7(10a + b) = 4(10b + a)$. Efectuând înmulțirile, observăm că $70a + 7b = 40b + 4a$, de unde $66a = 33b$, deci $2a = b$. Știm că a, b sunt cifre în baza 10, $a \neq 0, b \neq 0$, deducem de aici că numerele de forma $\overline{ab}$ sunt 12, 24, 36 și 48.

3. Proporții derivate

Exercițiul 10, pagina 56

Folosindu-ne de descompunerea numerelor în baza 10, rescriem proporția astfel: $\frac{10x+4}{4} = \frac{90+x}{x}$. Formăm o proporție derivată, scăzând numitorii din numărători. Obținem $\frac{10x+4-4}{4} = \frac{90+x-x}{x}$, deci $\frac{10x}{4} = \frac{90}{x}$. Formăm o nouă proporție derivată, împărțind numărătorii la 10, $\frac{10x:10}{4} = \frac{90:10}{x}$ și $\frac{x}{4} = \frac{9}{x}$. Aplicând proprietatea fundamentală a proporțiilor, obținem $x^2 = 36$. Cum x e număr natural, deducem că $x = 6$.

Exercițiul 13, pagina 56

Metoda 1 (Se folosesc proporții derivate)

Formăm o proporție derivată, înmulțind numărătorii cu 2. Obținem $\frac{x \cdot 2}{2x+y} = \frac{4 \cdot 2}{11}$, deci $\frac{2x}{2x+y} = \frac{8}{11}$. Formăm o nouă proporție derivată, scăzând numărători din numitorii, $\frac{2x}{2x+y-2x} = \frac{8}{11-8}$, $\frac{2x}{y} = \frac{8}{3}$. Formăm o altă proporție derivată, împărțind numărătorii la 2, $\frac{2x:2}{y} = \frac{8:2}{3}$, $\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$.

Metoda 2 (Se folosește proprietatea fundamentală a proporțiilor)

$$\frac{x}{2x+y} = \frac{4}{11}$$

Știm că produsul mezilor este egal cu produsul extremilor:

$$11 \cdot x = 4 \cdot (2x + y), \text{ de unde } 11x = 8x + 4y.$$

Separăm termenii care conțin x de cei care conțin y și obținem $11x - 8x = 4y$, adică $3x = 4y$, de unde, înmulțind cu $\frac{1}{3y}$ (y e diferit de 0), obținem $\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$.

Exercițiul 18, pagina 57

Derivăm proporțiile, scăzând din numitori numărătorii. Obținem $\frac{a}{b-a} = \frac{2}{3-2}$, deci $\frac{a}{b-a} = \frac{2}{1}$. Știm că $b - a = 12$, de unde rezultă faptul că proporția se poate scrie $\frac{a}{12} = \frac{2}{1}$. Aplicând proprietatea fundamentală a proporțiilor, obținem $a = 24$, iar din $b - a = 12$, $b = 24$.

Exercițiul 21, pagina 57

Înmulțim numărătorii cu 7, obținem $\frac{7a}{b} = \frac{14}{5}$, apoi înmulțim numitorii cu 2, pentru a obține $\frac{7a}{2b} = \frac{14}{10}$. Scăzând acum numitorii din numărători, vom obține $\frac{7a-2b}{2b} = \frac{4}{10}$. Știm din ipoteză $7a - 2b = 8$, deci putem rescrie proporția ca $\frac{8}{2b} = \frac{4}{10}$. Simplificăm cele două fracții și obținem $\frac{4}{b} = \frac{2}{5}$, apoi, aplicând proprietatea fundamentală a proporțiilor, $b = 10$. Din $7a - 2b = 8$ rezultă $a = 4$.

4. Șir de rapoarte egale

Exercițiul 2, pagina 57

Putem nota cu O numărul de ouă, cu U cantitatea de unt (exprimată în grame) și cu F cantitatea de făină (exprimată în grame) ce se vor folosi la a doua prăjitură. Fiind vorba de o rețetă pentru o prăjitură, cantitățile de ingrediente folosite sunt proporționale, deci putem scrie $\frac{2}{O} = \frac{50}{150} = \frac{120}{U} = \frac{350}{F}$. Aplicăm proprietatea fundamentală a proporțiilor pentru a calcula O , U și F . Obținem $O = 6$, $U = 360$ g, $F = 1050$ g.

Exercițiul 6, pagina 58

Aplicăm proprietatea fundamentală a șirului de rapoarte egale și obținem $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{14} = \frac{a+b+c}{3+4+14}$, deci $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{14} = \frac{42}{21}$. Simplificând, obținem $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{14} = \frac{2}{1}$. Din proporția la care am ajuns putem calcula, cu ajutorul proprietății fundamentale a proporțiilor, numerele a , b și c , ca fiind $a = 6$, $b = 8$, $c = 28$. Știind acum valorile numerelor a , b și c , înlocuim în expresia $\frac{2a+b+c}{b+c}$ și obținem $\frac{2a+b+c}{b+c} = \frac{12+8+28}{8+28} = \frac{48}{36}$. Simplificăm și obținem rezultatul final $\frac{4}{3}$.

5. Mărimi proporționale. Regula de trei simplă

Exercițiul 17, pagina 64

Numărul de muncitori și numărul de zile în care aceștia realizează lucrarea sunt mărimi invers proporționale (cu cât lucrează mai mulți muncitori, cu atât șanțul va fi săpat mai repede). Aplicăm regula de trei simplă, ținând cont de inversa proporționalitate a mărimilor:

10 muncitori 7 zile

5 muncitori x zile

Putem aplica proprietatea fundamentală a mărimilor invers proporționale. Obținem $10 \cdot 7 = 5 \cdot x$, de unde $x = 14$ zile. La fel și în cazul în care vrem să aflăm în câte zile vor termina lucrarea 20 de muncitori: $10 \cdot 7 = 20 \cdot x$, de unde $x = \frac{7}{2} = 3,5$ zile.

Exercițiul 41, pagina 65

Numerele a și b sunt invers proporționale cu 0,2 și 0,5. Știm că $0,2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ și $0,5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. Relația de inversă proporționalitate se poate scrie astfel:

$a \cdot 0,2 = b \cdot 0,5$, de unde $a \cdot \frac{1}{5} = b \cdot \frac{1}{2}$, adică $\frac{a}{5} = \frac{b}{2} = k$. De aici, $a = 5k$ și $b = 2k$. Înlocuind în relația $4a + 3b = 78$, obținem $4 \cdot 5k + 3 \cdot 2k = 78$, adică $20k + 6k = 78$. Obținem $26k = 78$, de unde $k = 78 : 26 = 3$ și $a = 5 \cdot 3 = 15$, $b = 2 \cdot 3 = 6$.

Exercițiul 42, pagina 65

Fie a , b , c cele trei numere în care îl vom împărți pe 840 ($a + b + c = 840$). Știm că a , b și c sunt direct proporționale cu 3, 7 și 11, deci putem scrie sub formă de proporție această relație: $\frac{a}{3} = \frac{b}{7} = \frac{c}{11}$. Din proprietatea fundamentală a șirului de rapoarte egale, obținem $\frac{a}{3} = \frac{b}{7} = \frac{c}{11} = \frac{a+b+c}{3+7+11} = \frac{840}{21} = 40$, de unde calculăm termenii necunoscuți și obținem $a = 120$, $b = 280$, $c = 440$.

8. Probabilități

Exercițiul 4, pagina 72

Numărul de cazuri posibile reprezintă numărul de bile din urnă. Astfel avem $3 + 5 + 2 = 10$ cazuri posibile. Cum avem doar 3 bile negre, probabilitatea de a extrage o bilă neagră este $p = \frac{3}{10}$.

Bilele care nu sunt galbene sunt fie negre, fie albe. Cum avem 3 bile albe și 5 bile negre, numărul cazurilor favorabile este 8 și $p = \frac{8}{10} = \frac{2}{5}$.

Cum avem 5 bile negre și 2 bile galbene, numărul cazurilor favorabile este 7 și $p = \frac{7}{10}$.

9. Probleme cu caracter practic

Exercițiul 1, pagina 73

Notăm cu x lungimea traseului (*exprimată în kilometri*).

Distanța parcursă în prima zi este $\frac{32}{100} \cdot x \text{ km}$, rămânând de parcurs $x - \frac{32}{100} \cdot x \text{ km} = \frac{68}{100} \cdot x \text{ km}$. A doua zi au fost parcurși $\frac{25}{100} \cdot \frac{68}{100} \cdot x \text{ km} = \frac{1}{4} \cdot \frac{68}{100} \cdot x \text{ km} = \frac{17}{100} \cdot x \text{ km}$. În cele două zile s-au parcurs $\frac{32}{100} \cdot x + \frac{17}{100} \cdot x \text{ km} = \frac{49}{100} \cdot x \text{ km}$.

Au mai rămas de parcurs 3 km până la jumătatea traseului, deci $\frac{49}{100} \cdot x + 3 \text{ km} = \frac{x}{2} \text{ km}$. Aducând la același numitor, obținem:

$$49x + 3 \cdot 100 = 50 \cdot x, \text{ de unde } x = 300.$$

Așadar, întreaga distanță este de 300 km.

Capitolul III. Numere întregi.

1. Mulțimea numerelor întregi. Opusul unui număr întreg.

Reprezentarea pe axă a numerelor întregi

Exercițiul 15, pagina 79

Mai întâi aflăm care este diferența de altitudine, adică: $1000 \text{ m} - 142 \text{ m} = 858 \text{ m}$. Cum la fiecare 33 m pe verticală temperatura aerului scade cu 1°C , aflăm cu câte grade scade temperatura. Astfel împărțim 858 la 33 și obținem că temperatura scade cu $858 : 33 = 26^\circ\text{C}$. Așadar, pentru a obține temperatura aerului la 1000 m, scădem din 15°C cele 26°C și obținem: $15^\circ\text{C} - 26^\circ\text{C} = -11^\circ\text{C}$.

2. Modulul sau valoarea absolută a unui număr întreg.

Compararea și ordonarea numerelor întregi

Exercițiul 14, pagina 82

b) $-|-|+3|| = -|-3|$. Primul modul din interior nu a modificat numărul $+3$ pentru că este pozitiv. Acum $-|-3| = -3$. Modulul a transformat numărul -3 în $+3$, însă rezultatul final a rămas -3 , pentru că modulul a avut un minus în față.

Exercițiul 22, pagina 82

a) $|x - 7| = 0$. Din proprietățile modulului, aflăm că modulul unui număr este zero dacă și numai dacă acel număr este zero. Atunci, $x - 7 = 0$, de unde obținem că $x = 7$.

b) $|x - 1| + |x + 1| = 0$. Cum $|x - 1|$ și $|x + 1|$ sunt mai mari sau egale cu 0 și suma lor e 0, obținem că $|x - 1| = 0$ și $|x + 1| = 0$. Din $x - 1 = 0$, obținem că $x = 1$, iar din $x + 1 = 0$, obținem că $x = -1$. Cum x nu poate fi egal cu 1 și -1 în același timp, obținem o contradicție. Astfel, ecuația nu are soluție.

c) $|x - 1| + 2 = 0$, de unde $|x - 1| = -2$. Cum modulul unui număr nu poate fi negativ, obținem că x aparține mulțimii vide.

4. Adunarea numerelor întregi. Proprietăți

Exercițiul 11, pagina 88

Aflăm mai întâi numerele. Cel mai mic număr întreg de trei cifre este -999 , iar cel mai mic număr întreg de două cifre este -99 . Atunci, pentru a afla suma lor, scriem semnul numărului cu modulul mai mare și adunăm modulele lor. Astfel:

$$-999 + (-99) = -(|-999| + |-99|) = -(999 + 99) = -1098.$$

Exercițiul 12, pagina 88

Aflăm mai întâi numerele. Cel mai mare număr întreg cu trei cifre diferite este 987 , iar cel mai mic număr întreg de trei cifre este -999 . Cum numerele au semne diferite, scriem semnul numărului care are modulul mai mare și apoi scădem modulele lor. Astfel:

$$987 + (-999) = -(|-999| - |987|) = -12.$$

Exercițiul 13, pagina 88

Aflăm mai întâi numerele. Cel mai mare număr întreg de două cifre diferite este 98 , iar cel mai mic număr întreg de trei cifre diferite este -987 . Cum numerele au semne diferite, scriem semnul numărului care are modulul mai mare și apoi scădem modulele lor. Astfel:

$$98 + (-987) = -(|-987| - |98|) = -(987 - 98) = -889.$$

6. Scăderea numerelor întregi

Exercițiul 9, pagina 92

a) $-(3 - 7 + 2) + (-5 + 2) - (-9 + 1)$. Desfacem parantezele și observăm că semnul „-” schimbă semnele din interiorul parantezelor. Obținem $-3 + 7 - 2 - 5 + 2 + 9 - 1$. Adunăm termenii pozitivi iar din ei scădem suma celor negativi. Astfel, vom avea:

$$7 + 2 + 9 - (3 + 2 + 5 + 1) = 18 - 11 = 7.$$

7. Înmulțirea numerelor întregi

Exercițiul 6, pagina 95

a) $-3 \cdot (+4) + (+6) \cdot (+4)$. Observăm că numărul $+4$ factor comun al fiecărei înmulțirii. Astfel, îl putem da factor comun și obținem: $4 \cdot (-3 + 6)$. În paranteză am păstrat termenii din fiecare înmulțire cu tot cu semn. Avem $4 \cdot (-3 + 6) = 4 \cdot 3 = 12$.

Exercițiul 12, pagina 95

a) $(x + 1) \cdot (y - 1) = 11$. Cum x și y sunt numere întregi, deducem că $x+1$ și $y-1$ sunt numere întregi. Astfel, trebuie să găsim perechi de numere întregi care au produsul 11.

I. $1 \cdot 11 = 11 \Rightarrow x + 1 = 1$, adică $x = 0$ și $y - 1 = 11$, adică $y = 12$.

II. $11 \cdot 1 = 11 \Rightarrow x + 1 = 11$, adică $x = 10$ și $y - 1 = 1$, adică $y = 2$.

III. $(-1) \cdot (-11) = 11 \Rightarrow x + 1 = -1$, adică $x = -2$ și $y - 1 = -11$, adică $y = -10$.

IV. $(-11) \cdot (-1) = 11 \Rightarrow x + 1 = -11$, adică $x = -10$ și $y - 1 = -1$, adică $y = 0$.

8. Împărțirea numerelor întregi

Exercițiul 7, pagina 99

În primul rând, trebuie să ne asigurăm că fracția există. Astfel, trebuie să punem condiția ca x să fie diferit de zero. Acum, pentru a obține un număr întreg după efectuarea împărțirii, trebuie ca 20 să se împartă exact la numărul x . Rezultă că x aparține mulțimii divizorilor lui 20 (adică $x \in D_{20}$). Atunci: $x \in \{-1, -2, -4, -5, -10, -20, 1, 2, 4, 5, 10, 20\}$.

Exercițiul 12, pagina 99

a) Cum împărțitorul unei trebuie să fie diferit de 0, obținem că x trebuie să fie diferit de -2 . $x + 2 = (-56) : 7$, deci $x = -10$.

9. Puterea cu exponent număr natural a unui număr întreg nenul

Exercițiul 6, pagina 101

a) $24 + (-4)^3 : (+2)^4 - 12^2 : (-36) + (-5^2)^3 : 5^4$.

Efectuăm mai întâi ridicările la putere simple. Avem:

$$24 + (-64) : 16 - 144 : (-36) + (-5^2)^3 : 5^4.$$

Folosim acum regula $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ pentru a calcula $(-5^2)^3$ și obținem:

$$24 + (-64) : 16 - 144 : (-36) + (-5^6) : 5^4.$$

Efectuăm împărțirile și obținem:

$$24 + (-4) - (-4) + (-5^2), \text{ adică } 24 + (-4) - (-4) + (-25). \text{ Obținem:}$$

$$24 - 4 + 4 + (-25) = -1.$$

10. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor

Exercițiul 4, pagina 103

e) $\{[-(+2)^5:2^2 - 81:3^2]: (3 - 20) - 2^6: (-4)^2\} \cdot 3^2$.

Pasul I: Efectuăm mai întâi calculele din parantezele rotunde. Avem:

$$\{[-(+2)^5:2^2 - 81:3^2]: (-17) - 2^6: (-4)^2\} \cdot 3^2$$

Pasul II: Efectuăm calculele din parantezele pătrate. Avem:

$$\{[-(+2)^{5-2} - 81:9]: (-17) - 2^6: (-4)^2\} \cdot 3^2, \text{ adică:}$$

$$\{[-(+2)^3 - 9]: (-17) - 2^6: (-4)^2\} \cdot 3^2, \text{ adică:}$$

$$\{[-8 - 9]: (-17) - 2^6: (-4)^2\} \cdot 3^2, \text{ deci:}$$

$$\{-17: (-17) - 2^6: (-4)^2\} \cdot 3^2$$

Pasul III: Efectuăm calculele din acolade:

$$\{1 - 64 : 16\} \cdot 3^2, \text{ adică:}$$

$$\{1 - 4\} \cdot 3^2, \text{ deci:}$$

$$(-3) \cdot 3^2$$

Pasul IV: Efectuăm calculele:

$$(-3) \cdot 3^2 = -3^{1+2} = -3^3 = -27.$$

11. Ecuații în mulțimea numerelor întregi

Exercițiul 4, pagina 104

g) Prin calcule elementare încercăm să izolăm necunoscuta x . Avem $15 - 3x = 12$. Scădem numărul 15 din ambii membrii. Obținem: $15 - 3x - 15 = 12 - 15$, adică $-3x = -3$. Împărțim cu numărul -3 întreaga ecuație: $-3x : (-3) = \frac{-3}{-3}$, de unde aflăm că $x = 1$.

Exercițiul 6, pagina 105

f) Efectuăm calculele și mutăm în membrul stâng termenii care îl conțin pe x , iar în membrul drept, termenii care nu îl conțin pe x . Avem:

$$1 - 4(2x - 1) = 3(x + 2) + 10.$$

Desfacem parantezele rotunde și rezultă:

$1 - 4 \cdot 2 \cdot x - 4 \cdot (-1) = 3 \cdot x + 3 \cdot 2 + 10$. Efectuăm înmulțirile posibile și avem: $1 - 8 \cdot x + 4 = 3 \cdot x + 6 + 10$. Mutăm membrii care îl conțin pe x din membrul drept în membrul stâng. **Atenție!** La această mutare, semnul se schimbă. Avem: $1 - 8 \cdot x + 4 - 3 \cdot x = 6 + 10$. Mutăm în membrul drept termenii care nu îl conțin pe x . Avem:

$$-8 \cdot x - 3 \cdot x = 6 + 10 - 1 - 4.$$

Efectuăm calculele și obținem: $-11 \cdot x = 11$. Împărțim cu -11 întreaga ecuație: $\frac{-11}{-11} \cdot x = \frac{11}{-11}$, de unde aflăm că $x = -1$.

12. Inecuații în mulțimea numerelor întregi

Exercițiul 4 pagina 107

a) $3x - 6 < 2x + 1$. Scădem termenul $2x$ din ambii termeni ai inecuației. Avem $3x - 2x - 6 < 2x + 1 - 2x$, de unde rezultă că $x - 6 < 1$, deci:

$$x < 1 + 6 \text{ adică } x < 7.$$

Rezultă că propoziția este adevărată pentru orice număr întreg mai mic strict decât numărul 7. Avem:

$$S = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 7\} \text{ adică:}$$

$$S\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, 6\}.$$

d) $3 - 2x \leq x + 6$. Scădem termenul x din ambii termeni ai inecuației. Avem $3 - 2x - x \leq x + 6 - x$, de unde obținem că $3 - 3x \leq 6$.

Scădem numărul 3 din ambii membri ai inecuației și rezultă:

$$3 - 3x - 3 \leq 6 - 3, \text{ adică } -3x \leq 3.$$

Împărțim cu -3 în ambii membri ai inecuației.

Observație: Pentru că am împărțit printr-un număr negativ, schimbăm și semnul inegalității. Obținem:

$$\frac{-3}{-3} \cdot x \geq \frac{3}{-3}, \text{ adică } x \geq -1.$$

Cum x este număr întreg, $x \in \{-1, 0, 1, \dots\}$.

Exercițiul 5, pagina 107

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x + 1 < -2\}$. Rezolvăm inegalitatea din definiția mulțimii A , iar apoi rescriem A , enumerând elementele ei. Avem: $x + 1 < -2$. Scădem numărul 1 ambilor membri ai inegalității și obținem: $x + 1 - 1 < -2 - 1$, adică $x < -3$. Obținem că mulțimea A este formată din numerele întregi mai mici strict decât -3 . Putem scrie mulțimea A enumerând elementele ei astfel: $A = \{\dots, -6, -5, -4\}$.

13. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor și al inecuațiilor

Exercițiul 4, pagina 108

Notăm prețul cărții cu c , iar prețul pixului cu p . Astfel, cum cartea este mai scumpă de cinci ori decât un pix obținem ecuația: $c = 5 \cdot p$ (1)

Cum împreună costă 12 lei obținem ecuația: $c + p = 12$ lei (2).

Înlocuim în ecuația (2) scrierea lui c din ecuația (1) și obținem: $5 \cdot p + p = 12$ lei, adică $6 \cdot p = 12$ lei. Împărțim cu numărul 6 și avem: $\frac{6}{6} \cdot p = \frac{12}{6}$ lei, adică $p = 2$ lei. Înlocuim valoarea lui p în oricare dintre cele două ecuații pentru a afla valoarea lui c . De exemplu, înlocuind în relația (1) obținem: $c = 5 \cdot 2$ lei, adică prețul unei cărți este $c = 10$ lei.

Exercițiul 6, pagina 108

Notăm vârsta tatălui cu x , vârsta fiului cu y și vârsta bunicului cu z . Cum tatăl este cu 24 de ani mai în vârstă decât fiul, obținem: $x = y + 24$ (1). Tatăl este cu 21 de ani mai tânăr decât bunicul, deci $x = z - 21$ (2). Cum suma vârstelor lor este de 87 de ani, avem: $x + y + z = 87$ (3).

Din ecuația (1) obținem că: $y = x - 24$.

Din ecuația (2) obținem că: $z = x + 21$.

Înlocuim aceste relații în ecuația (3) și obținem: $x + x - 24 + x + 21 = 87$, adică $3x - 3 = 87$, de unde avem $3x = 90$.

Împărțind prin 3 obținem $\frac{3}{3}x = \frac{90}{3}$, adică $x = 30$ ani. Înlocuind x cu 30 în relațiile (1) și (2), aflăm că $y = 30 - 24 = 6$ ani, iar $z = 30 + 21 = 51$ ani.

Capitolul IV. Mulțimea numerelor raționale

1. Număr rațional. Mulțimea numerelor raționale

Exercițiul 7, pagina 115

Scriem șirul de rapoarte egale $\frac{20}{a} = \frac{b}{24} = \frac{5}{3}$. Putem calcula, folosind proprietatea fundamentală a proporțiilor, numerele a și b . Obținem $5 \cdot a = 60$, de unde $a = 12$ și $3 \cdot b = 120$, de unde $b = 40$.

Exercițiul 22, pagina 117

Știm că o fracție ordinară ireductibilă se transformă în fracție zecimală periodică mixtă dacă descompunerea numitorului în produs de puteri de factori primi conține cel puțin unul din factorii primi 2 sau 5 și cel puțin un alt factor prim diferit de 2 și 5. Simplificăm fracția prin $3 \cdot 5$ și obținem fracția ireductibilă $\frac{8}{5^{n-2} \cdot 3^{n-3}}$. Cea mai mică valoare a numărului natural n pentru care fracția se transformă în fracție zecimală periodică mixtă este 4.

Exercițiul 24, pagina 117

Transformând fracția ordinară $\frac{1}{23}$ în fracție zecimală se obține: $0, (0434782608695652173913)$. Observăm că perioada are 22 de cifre. Grupăm zecimalele în grupe, fiecare grupă având 22 de zecimale.

0, 0434782608695652173913 0434782608695652173913 04347.

22 cifre

22 cifre

Împărțind numărul 1999 la 22, aflăm câte astfel de grupe se formează cu primele 1999 de zecimale și câte zecimale rămân în afara acestor grupe. Cum $1999:22 = 90 \text{ rest } 19$, rezultă că se formează 90 de grupe și rămân 19 zecimale în afara grupelor. (Acestea sunt: 0, 4, 3, 4, 7, 8, 2, 6, 0, 8, 6, 9, 5, 6, 5, 2, 1, 7, 3). Așadar, cifra cerută este 3.

2. Reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor. Opusul și modulul unui număr rațional. Compararea și ordonarea numerelor raționale

Exercițiul 25, pagina 122

c) Cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu 1,226 este 1, deci parte întreagă a numărului 1,226 este: $[1,226] = 1$. Partea fracționară a numărului 1,226 va fi: $\{1,226\} = 1,226 - [1,226]$, deci $\{1,226\} = 1,226 - 1$. Obținem $\{1,226\} = 0,226$.

e) $-\frac{7}{8} = -0,875$. Cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu $-\frac{7}{8}$ este -1 , deci parte întreagă a numărului $-\frac{7}{8}$ este: $[-\frac{7}{8}] = -1$. Partea fracționară a numărului $-\frac{7}{8}$ va fi: $\{-\frac{7}{8}\} = -\frac{7}{8} - [-\frac{7}{8}]$, deci $\{-\frac{7}{8}\} = -\frac{7}{8} - (-1)$. Obținem $\{-\frac{7}{8}\} = \frac{1}{8} = 0,125$.

f) Cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu $-1,7$ este -2 , deci parte întreagă a numărului $-1,7$ este: $[-1,7] = -2$. Partea fracționară a numărului $-1,7$ va fi: $\{-1,7\} = -1,7 - [-1,7]$, deci $\{-1,7\} = -1,7 - (-2)$. Obținem $\{-1,7\} = 0,3$.

h) Cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu $-1,(3)$ este -2 , deci parte întreagă a numărului $-1,(3)$ este: $[-1,(3)] = -2$. Partea fracționară a numărului $-1,(3)$ va fi: $\{-1,(3)\} = -1,(3) - [-1,(3)]$, deci $\{-1,(3)\} = -1,(3) - (-2) = -\frac{13-1}{9} + 2 = \frac{2}{3}$.

Exercițiul 30, pagina 123

a) Se amplifică fracțiile pentru a se obține același numitor:

$$\frac{1}{3} < \frac{n}{15} < \frac{6}{7} \Leftrightarrow \frac{105}{315} < \frac{21n}{315} < \frac{270}{315} \Leftrightarrow 105 < 21n < 270 \Leftrightarrow 5 < n < \frac{90}{7}.$$

Cum n este număr natural, $n \in \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

3. Adunarea numerelor raționale. Proprietăți

Exercițiul 8, pagina 125

Pentru a afla lungimea umbrei, trebuie să aducem dimensiunile cunoscute la același numitor pentru a le putea aduna.

Astfel, introducem mai întâi întregii în fracție. Obținem:

$$12\frac{5}{8}m = \frac{12 \cdot 8 + 5}{8}m = \frac{101}{8}m \text{ și } 3\frac{7}{12}m = \frac{3 \cdot 12 + 7}{12}m = \frac{43}{12}m.$$

Acum, pentru a putea aduna fracțiile, le aducem la același numitor. Aflăm c.m.m.m.c. al lor. Cum $8 = 2^3$, iar $12 = 2^2 \cdot 3$, obținem că $[8; 12] = 2^3 \cdot 3 = 24$. Astfel, prima fracție trebuie amplificată cu $24 : 8 = 3$, iar a doua cu $24 : 12 = 2$. Avem:

$$^3)\frac{101}{8}m = \frac{3 \cdot 101}{3 \cdot 8}m = \frac{303}{24}m, \text{ iar } ^2)\frac{43}{12}m = \frac{2 \cdot 43}{2 \cdot 12}m = \frac{86}{24}m.$$

Adunând cele două fracții obținem că lungimea umbrei este:

$$\frac{303}{24}m + \frac{86}{24}m = \frac{303+86}{24}m = \frac{389}{24}m = 16\frac{5}{24}m.$$

Exercițiul 31, pagina 128

a) Observăm că numitorii fracțiilor din sumă sunt numerele: 8, 9, 10, ..., 30, adică $30 - 8 + 1 = 23$ de numere și, implicit, suma are 23 de termeni.

Se observă, de asemenea, că cel mai mare termen al sumei este $\frac{1}{8}$. Astfel, putem majora fiecare termen al sumei cu $\frac{1}{8}$ și obținem:

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{30} < \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8}}_{23 \text{ de ori}} = \frac{1}{8} \cdot 23 = \frac{23}{8}.$$

Cum $\frac{23}{8}$ este mai mic decât $\frac{24}{8} = 3$, obținem că suma inițială este mai mică decât 3.

4. Scăderea numerelor raționale

Exercițiul 9, pagina 130

Notăm numărul necunoscut cu litera x . Din ipoteză știm că $x + \frac{7}{36} = \frac{35}{48}$. Scăzând $\frac{7}{36}$ din această relație, obținem: $x + \frac{7}{36} - \frac{7}{36} = \frac{35}{48} - \frac{7}{36}$, de unde rezultă că $x = \frac{35}{48} - \frac{7}{36}$. Pentru a găsi valoarea lui x aducem cele două fracții la același numitor. Cum $48 = 2^4 \cdot 3$, iar $36 = 2^2 \cdot 3^2$, obținem că $[48; 36] = 2^4 \cdot 3^2 = 144$. Astfel, prima fracție trebuie amplificată cu $144:48 = 3$, iar a doua cu $144:36 = 4$. Avem:

$$3) \frac{35}{48} = \frac{3 \cdot 35}{3 \cdot 48} = \frac{105}{144}, \text{ iar } 4) \frac{7}{36} = \frac{4 \cdot 7}{4 \cdot 36} = \frac{28}{144}.$$

$$\text{Obținem } x = \frac{105}{144} - \frac{28}{144} = \frac{77}{144}.$$

Exercițiul 18, pagina 131

c) Calculăm mai întâi suma $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}$.

Folosindu-ne de egalitatea $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$ vom rescrie termenii sumei. Spre

exemplu $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$, iar $\frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$. Astfel:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \\ \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} &= {}^{100)} 1 - \frac{1}{100} = \frac{100-1}{100} = \frac{99}{100}. \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{50}{100} < \frac{99}{100} < \frac{100}{100} = 1 \text{ și}$$

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} < 1.$$

5. Înmulțirea numerelor raționale

Exercițiul 5, pagina 132

j) Putem rescrie termenii înmulțirii în mod echivalent astfel:

$$\frac{49}{81} \cdot \left(-\frac{30}{7}\right) \cdot \frac{18}{42} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{7 \cdot 7}{9 \cdot 9} \cdot \left(-\frac{6 \cdot 5}{7}\right) \cdot \frac{9 \cdot 2}{6 \cdot 7} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right).$$

Putem efectua simplificări și obținem

$$\begin{aligned} \frac{7 \cdot 7}{9 \cdot 9} \cdot \left(-\frac{6 \cdot 5}{\cancel{7}}\right) \cdot \frac{9 \cdot 2}{6 \cdot \cancel{7}} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) &= \frac{\cancel{7}}{9 \cdot 9} \cdot \left(-\frac{6 \cdot 5}{1}\right) \cdot \frac{9 \cdot 2}{6 \cdot \cancel{7}} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{9 \cdot 9} \cdot \left(-\frac{\cancel{6} \cdot 5}{1}\right) \cdot \frac{9 \cdot 2}{6} \cdot \\ \left(-\frac{4}{\cancel{5}}\right) &= \frac{1}{9 \cdot 9} \cdot \left(-\frac{5}{1}\right) \cdot \frac{9 \cdot 2}{1} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{\cancel{9} \cdot 9} \cdot \left(-\frac{1}{1}\right) \cdot \frac{9 \cdot 2}{1} \cdot \left(-\frac{4}{1}\right) = \\ &= \frac{1}{9 \cdot \cancel{9}} \cdot \left(-\frac{1}{1}\right) \cdot \frac{\cancel{9} \cdot 2}{1} \cdot \left(-\frac{4}{1}\right) = \frac{1}{9} \cdot \left(-\frac{1}{1}\right) \cdot \frac{2}{1} \cdot \left(-\frac{4}{1}\right) = \frac{8}{9}. \end{aligned}$$

Exercițiul 18, pagina 134

a) Efectuăm calculele în membrul drept al egalității. Folosindu-ne de proprietatea de distributivitate a înmulțirii, desfacem paranteza, și obținem:

$$\frac{1}{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right) = \frac{1}{k \cdot n} - \frac{1}{k \cdot (n+k)} = \frac{1}{k \cdot n} - \frac{1}{k^2 + k \cdot n}$$

Aducem la același numitor cei doi termeni ai scăderii, ajungând la:

$$\frac{k^2 + k \cdot n}{k \cdot n} - \frac{k \cdot n}{k^2 + k \cdot n} = \frac{k^2 + k \cdot n - k \cdot n}{k \cdot n(k^2 + k \cdot n)} = \frac{k^2}{k^3 \cdot n + n^2 \cdot k^2}$$

Dăm factor comun pe $n \cdot k^2$ la numitor, observăm că putem simplifica:

$$\frac{\cancel{k}^2}{n \cdot \cancel{k}^2 (k+n)} = \frac{1}{n \cdot (n+k)}.$$

6. Împărțirea numerelor raționale

Exercițiul 3, pagina 135

f) Mai întâi, înmulțim primul termen cu inversul celui de-al doilea termen. Obținem: $-\frac{5}{8} : \left(-\frac{32}{15}\right) = -\frac{5}{8} \cdot \left(-\frac{15}{32}\right)$. Putem rescrie termenii în mod echivalent, astfel: $-\frac{5}{8} \cdot \left(-\frac{8 \cdot 4}{5 \cdot 3}\right)$. Efectuând simplificările, obținem rezultatul final $\frac{4}{3}$.

Exercițiul 8, pagina 136

$$\text{b) } \frac{\frac{1}{9}}{\frac{3}{7}} = \frac{1}{9} : \frac{3}{7} = \frac{1}{9} \cdot \frac{7}{3} = \frac{1 \cdot 7}{9 \cdot 3} = \frac{7}{27}.$$

Exercițiul 13, pagina 136

Notăm numărul căutat cu x . Astfel, avem de rezolvat ecuația $x \cdot \frac{12}{49} = \frac{18}{35}$. Înmulțind relația cu inversul numărului $\frac{12}{49}$, obținem: $x \cdot \frac{12}{49} \cdot \frac{49}{12} = \frac{18}{35} \cdot \frac{49}{12}$, adică $x = \frac{18}{35} \cdot \frac{49}{12}$. Efectuând simplificările, se obține că $x = 2 \frac{1}{10}$.

Exercițiul 18, pagina 137

Se cere să aflăm necunoscuta x din ecuația $x : \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{7}{8}$. $x = \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{7}{8}$. Observăm că putem efectua simplificarea numărătorului 4 cu numitorul 8, obținând $x = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{7}{2}$, deci $x = -\frac{7}{6}$.

7. Puterea cu exponent întreg a unui număr rațional nenul.

Reguli de calcul cu puteri

Exercițiul 10, pagina 140

a) Aplicăm regulile de calcul cu puteri și obținem: $\left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 : \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \left(\frac{1}{2}\right)^{7+3-8} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Exercițiul 16, pagina 141

a) Putem scrie numărul 0,027 astfel: $0,027 = 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 = 0,3^{1+1+1} = 0,3^3$.

Astfel, vom putea rescrie ecuația $0,3^x = 0,027$ în mod echivalent: $0,3^x = 0,3^3$. Având bazele egale, trebuie ca și exponenții să fie egali. Rezultă că $x = 3$.

Exercițiul 22, pagina 141

a) Observăm că $\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2 \cdot 3}, \dots, \frac{1}{1000^2} < \frac{1}{999 \cdot 1000}$, deci

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{1000^2} < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{999 \cdot 1000} = 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{9999} - \frac{1}{1000} = 1 + 1 - \frac{1}{1000} = 2 - \frac{1}{1000} < 2$$

b) Fie $S = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{100} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{100}}$.

Atunci $3 \cdot S = 3 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{100}} \right) = 3 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3^2} + 3 \cdot \frac{1}{3^3} + \dots + 3 \cdot \frac{1}{3^{100}} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{99}} = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{99}$ și

$$3 \cdot S - S = \left[1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{99} \right] - \left[\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{100} \right] = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{100}$$

$$2 \cdot S = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{100}, \text{ deci } S = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{100} \right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{100} < \frac{1}{2}$$

8. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor

Exercițiul 11, pagina 144

f) Efectuăm mai întâi calculele din parantezele rotunde aducând la același numitor și introducând întregii în fracție. Obținem:

$$\begin{aligned} & 2 - \frac{5}{2} \cdot \left\{ \frac{1}{8} + \left[\left(\frac{4}{3} - \frac{5}{12} \right) + \frac{2}{15} - \left(\frac{30+1}{30} - \frac{2}{15} \right) \right] : \frac{2}{3} \right\} = \\ & = 2 - \frac{5}{2} \cdot \left\{ \frac{1}{8} + \left[\left(\frac{8}{12} - \frac{5}{12} \right) + \frac{2}{15} - \left(\frac{31}{30} - \frac{26}{30} \right) \right] : \frac{2}{3} \right\} = \\ & = 2 - \frac{5}{2} \cdot \left[\frac{1}{8} + \left(\frac{3}{12} + \frac{2}{15} - \frac{5}{30} \right) : \frac{2}{3} \right]. \end{aligned}$$

Acoladele devind paranteze pătrate, iar parantezele pătrate devin paranteze rotunde. Efectuăm acum calculele din parantezele rotunde, aducând fracțiile la același numitor. Avem: $2 - \frac{5}{2} \cdot \left[\frac{1}{8} + \left(\frac{5}{12} + \frac{2}{15} - \frac{2}{30} \right) : \frac{2}{3} \right] =$

$$= 2 - \frac{5}{2} \cdot \left[\frac{1}{8} + \left(\frac{15}{60} + \frac{8}{60} - \frac{10}{60} \right) : \frac{2}{3} \right] = 2 - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{13}{60} : \frac{2}{3} \right).$$

Parantezele pătrate devin paranteze rotunde, iar parantezele rotunde dispar. Împărțirea prin $\frac{2}{3}$ este echivalentă cu înmulțirea cu inversul ei, adică $\frac{3}{2}$. Efectuăm acum împărțirea din parantezele rotunde și obținem: $2 - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{13}{60} \cdot \frac{3}{2} \right) = 2 - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{13}{20} \cdot \frac{1}{2} \right) = 2 - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{5}{8} + \frac{13}{40} \right)$. Efectuăm acum calculele din parantezele rotunde, aducând fracțiile la același numitor. Avem: $2 - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{5}{40} + \frac{13}{40} \right) = 2 - \frac{5}{2} \cdot \frac{18}{40}$. Efectuăm acum: $\frac{5}{2} \cdot \frac{18}{40} = \frac{9}{8}$. Aducem fracțiile rămase la același numitor și obținem: ${}^8) 2 - \frac{9}{8} = \frac{16}{8} - \frac{9}{8} = \frac{7}{8}$.

9. Ecuații în mulțimea numerelor raționale

Exercițiul 8, pagina 146

b) Transformăm mai întâi fracția zecimală periodică în fracție ordinară. Obținem: $\frac{2}{9} - \frac{5}{6} \cdot x = \frac{7}{9}$. Scădem din ambii membri ai ecuației numărul $\frac{2}{9}$. Avem $\frac{2}{9} - \frac{5}{6} \cdot x - \frac{2}{9} = \frac{7}{9} - \frac{2}{9}$. Efectuăm calculele și obținem: $-\frac{5}{6} \cdot x = \frac{5}{9}$. Împărțim prin $-\frac{5}{6}$ și obținem $x = \frac{5}{9} : (-\frac{5}{6})$. Împărțirea prin fracția $-\frac{5}{6}$ este echivalentă cu înmulțirea cu inversul ei, adică $-\frac{6}{5}$. Obținem că $x = \frac{5}{9} \cdot (-\frac{6}{5}) = -\frac{2}{3}$.

Exercițiul 9, pagina 146

a) Aducem toate fracțiile la același numitor. Avem: $\frac{x+5}{3} + \frac{x-3}{4} = \frac{7}{2}$, de unde obținem că $\frac{4 \cdot (x+5)}{12} + \frac{3 \cdot (x-3)}{12} = \frac{6 \cdot 7}{12}$, adică $\frac{4 \cdot (x+5) + 3 \cdot (x-3)}{12} = \frac{42}{12}$ și $4 \cdot (x+5) + 3 \cdot (x-3) = 42$ (Dacă două fracții egale au același numitor, atunci numărătorii lor sunt egali). De aici obținem: $4 \cdot x + 4 \cdot 5 + 3 \cdot x - 3 \cdot 3 = 42$, adică $4 \cdot x + 20 + 3 \cdot x - 9 = 42$, mai precis $7 \cdot x + 11 = 42$. Scădem 11 din ambii termeni ai ecuației și obținem: $7 \cdot x + 11 - 11 = 42 - 11$, adică $7 \cdot x = 31$. Împărțim prin 7 și aflăm că $x = \frac{31}{7} = 4\frac{3}{7}$.

Exercițiul 12, pagina 147

a) Ținând cont de proprietățile modulului unui număr rațional, deducem că $3x - 1$ poate fi egal atât cu $\frac{3}{4}$, cât și cu opusul lui, $-\frac{3}{4}$. Rezolvăm ecuația pe cazuri:

Cazul I: $3x - 1 = \frac{3}{4}$. Adunăm 1 la ambii termeni ai egalității și obținem $3x - 1 + 1 = \frac{3}{4} + 1$, echivalent cu $3x = \frac{3}{4} + 1$. Aducem la același numitor, $3x = \frac{3}{4} + \frac{4}{4}$, deci $3x = \frac{7}{4}$. Înmulțim ambii termeni ai egalității cu $\frac{1}{3}$ și obținem $3x \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{3}$, de unde $x = \frac{7}{12}$.

Cazul II: $3x - 1 = -\frac{3}{4}$. Adunăm 1 la ambii termeni ai egalității și obținem $3x - 1 + 1 = -\frac{3}{4} + 1$, echivalent cu $3x = -\frac{3}{4} + 1$. Aducem la același numitor,

$3x = -\frac{3}{4} + \frac{4}{4}$, deci $3x = \frac{1}{4}$. Înmulțim ambii termeni ai egalității cu $\frac{1}{3}$ și obținem $3x \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}$, de unde $x = \frac{1}{12}$.

Aflăm astfel soluția ecuației, $x \in \left\{ \frac{1}{12} ; \frac{7}{12} \right\}$.

10. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor

Exercițiul 14, pagina 149

Observăm că necunoscutele sunt reprezentate de prețul televizorului și prețul frigiderului, pe care le notăm cu T și, respectiv, F . Cum televizorul și frigiderul costă împreună 2100 lei, scriem relația echivalentă $T + F = 2100 \text{ lei}$. Cum prețul frigiderului reprezintă $\frac{3}{4}$ din prețul televizorului, obținem relația $F = \frac{3}{4} \cdot T$. Înlocuind valoarea lui F din ultima relație în prima relație, obținem:

$${}^4) T + \frac{3}{4} \cdot T = 2100 \text{ lei}.$$

Aducem la același numitor termenii din stanga egalității și obținem:

$$\frac{4 \cdot T}{4} + \frac{3 \cdot T}{4} = 2100 \text{ lei}, \text{adică: } \frac{7 \cdot T}{4} = 2100 \text{ lei}.$$

Împărțind cu numărul $\frac{7}{4}$, de unde $T = 2100 : \frac{7}{4} \text{ lei}$ și echivalent $T = 2100 \cdot \frac{4}{7} \text{ lei}$, deci $T = 1200 \text{ lei}$. Înlocuim valoarea lui T în oricare din cele două ecuații de la început pentru a obține F . Înlocuind în prima ecuație, obținem: $1200 \text{ lei} + F = 2100 \text{ lei}$. Scăzând 1200 lei din ambii termeni ai ecuației, avem: $1200 \text{ lei} + F - 1200 \text{ lei} = 2100 \text{ lei} - 1200 \text{ lei}$, deci $F = 900 \text{ lei}$.

Așadar, televizorul costă 1200 lei, iar frigiderul costă 900 lei.

Efectuăm verificarea și obținem că $1200 \text{ lei} + 900 \text{ lei} = 2100 \text{ lei}$, iar

$$\frac{900 \text{ lei}}{1200 \text{ lei}} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}.$$

GEOMETRIE

Capitolul I. Noțiuni geometrice fundamentale.

1. Unghiuri opuse la vârf.

Exercițiul 4, pagina 155

Observăm că unghiurile 1 și 3 sunt opuse la vârf. Cum $m(\sphericalangle 1) = 25^\circ$, rezultă că $m(\sphericalangle 3) = 25^\circ$. Observăm că unghiurile 2 și 3 formează împreună un unghi alungit, deci putem afla $m(\sphericalangle 2) = 180^\circ - 25^\circ$, de unde $m(\sphericalangle 2) = 155^\circ$. Cum unghiurile 2 și 4 sunt opuse la vârf, aflăm și măsura unghiului 4, ca fiind $m(\sphericalangle 4) = 155^\circ$.

Exercițiul 8, pagina 155

Unghiurile $\widehat{AOC}$ și $\widehat{BOD}$ sunt opuse la vârf, deci vor avea măsurile egale. Astfel, putem scrie $m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{BOD})$, de unde $2x + 5 = 58^\circ$. Aflăm din ecuație x ca fiind egal cu $\frac{58^\circ - 5^\circ}{2}$, deci $x = 26^\circ 30'$. Cum unghiurile $\widehat{BOD}$ și $\widehat{AOD}$ formează împreună un unghi alungit, calculăm $m(\widehat{AOD}) = 180^\circ - 58^\circ$ și obținem $m(\widehat{AOD}) = 122^\circ$.

2. Unghiuri formate în jurul unui punct.

Exercițiul 5, pagina 157

Pentru a afla cât măsoară cele două unghiuri congruente împreună, din suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct scădem suma măsurilor celorlalte unghiuri. Astfel, cele două unghiuri congruente măsoară $360^\circ - 224^\circ$, adică 136° . Pentru a afla cât măsoară unul dintre ele, cum acestea sunt congruente, trebuie să împărțim 136° la 2. Aflăm că un unghi măsoară $\frac{136^\circ}{2} = 68^\circ$.

Exercițiul 11, pagina 158

Fiind vorba de unghiuri formate în jurul punctului O , putem deduce că $m(\widehat{AOD}) + m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) + m(\widehat{COD}) = 360^\circ$. Știm că $\widehat{AOB}$ și $\widehat{COD}$ sunt unghiuri drepte, iar $m(\widehat{BOC}) = 50^\circ$. Putem atunci afla $m(\widehat{AOD})$ ca fiind egală cu $360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 50^\circ$, de unde calculăm $m(\widehat{AOD}) = 130^\circ$.

3. Unghiuri suplementare. Unghiuri complementare.

Exercițiul 13, pagina 160

Notăm cu x măsura unghiului căutat, cu y complementul său și, ținând, seama de definiția complementului, $y = 90^\circ - x$.

Notăm cu z suplementul unghiului x și, ținând seama de definiția suplementului, $z = 180^\circ - x$.

Din ipoteză știm că $3 \cdot y = z$. În această relație înlocuim locuim y și z și obținem $3 \cdot (90^\circ - x) = 180^\circ - x$, adică $3 \cdot 90^\circ - 3 \cdot x = 180^\circ - x$, echivalent cu $270^\circ - 3 \cdot x = 180^\circ - x$.

Mutăm termenii care îl conțin pe x în dreapta egalului, iar termenii care nu îl conțin pe x în stânga egalului. Avem:

$$270^\circ - 180^\circ = 3 \cdot x - x, \text{ adică } 90^\circ = 2 \cdot x. \text{ Obținem că } x = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ.$$

Exercițiul 18, pagina 160

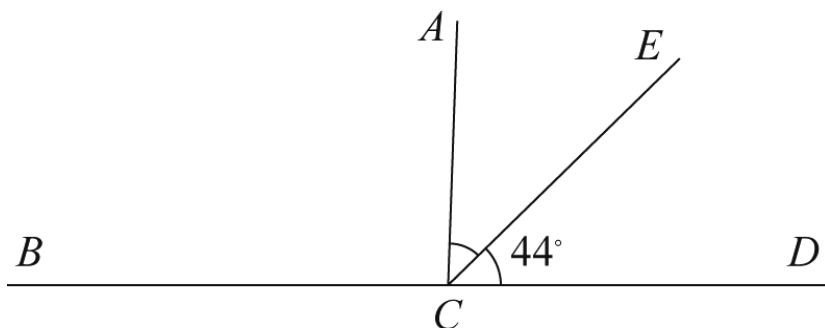
Notăm cu x și y măsurile celor două unghiuri. Din ipoteză știm că sunt unghiuri complementare. Astfel $x + y = 90^\circ$, deci $y = 90^\circ - x$. Cum $x - y = 24^\circ$, obținem că: $x - (90^\circ - x) = 24^\circ$, adică $x - 90^\circ + x = 24^\circ$. Avem că $2 \cdot x = 24^\circ + 90^\circ$, adică $2 \cdot x = 114$, de unde aflăm că $x = \frac{114}{2} = 57^\circ$. Imediat avem că:

$$y = 90^\circ - 57^\circ = 33^\circ.$$

4. Unghiuri adiacente. Bisectoarea unui unghi. Construcția bisectoarei unui unghi.

Exercițiul 11, pagina 163

Cum $\angle ACB$ și $\angle DCA$ sunt adiacente, rezultă că au în comun latura CA . Cum CE este bisectoarea lui $\angle DCA$, o desenăm astfel încât să împartă unghiul $\angle DCA$ în două unghiuri congruente, obținând figura:



Știm că $m(\angle ECB) = 136^\circ$, iar din construcție se observă că $\angle ECB$ este suplementul unghiului $\angle DCE$. Astfel $m(\angle DCE) = 180^\circ - m(\angle ECB)$, adică:

$$m(\angle DCE) = 180^\circ - 136^\circ = 44^\circ.$$

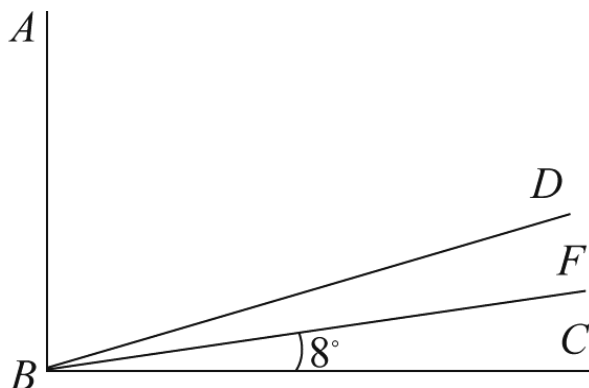
Cum CE este bisectoarea unghiului $\widehat{DCA}$ obținem că unghiurile $\widehat{DCE}$ și $\widehat{ECA}$ sunt congruente. Rezultă:

$$m(\angle DCA) = m(\angle DCE) + m(\angle ECA) = 44^\circ + 44^\circ = 88^\circ.$$

Cum unghiurile $\angle ACB$ și $\angle DCA$ sunt suplementare, rezultă că:

$$m(\angle ACB) = 180^\circ - m(\angle DCA), \text{ adică } m(\angle ACB) = 180^\circ - 88^\circ = 92^\circ.$$

Exercițiul 13, pagina 163



Știm că $m(\angle ABF) = 82^\circ$, și unghiurile $\angle ABD$ și $\angle DBC$ sunt complementare (adică $m(\angle ABC) = 90^\circ$)

Astfel, $m(\angle FBC) = 90^\circ - m(\angle ABF)$, adică $m(\angle FBC) = 90^\circ - 82^\circ = 8^\circ$. Cum $[BF]$ este bisectoarea unghiului $\angle DBC$ obținem că unghiurile $\widehat{DBF}$ și $\widehat{FBC}$ sunt congruente. Astfel:

$$m(\angle DBC) = m(\angle DBF) + m(\angle FBC) = 8^\circ + 8^\circ = 16^\circ.$$

Cum unghiurile $\widehat{ABD}$ și $\widehat{DBC}$ sunt complementare, rezultă că:

$$m(\angle ABD) = 90^\circ - m(\angle DBC), \text{ adică } m(\angle ABD) = 90^\circ - 16^\circ = 74^\circ.$$

5. Unghiuri determinate de două drepte cu o secantă.

Exercițiul 5, pagina 169

Din ipoteză, $m(\sphericalangle 1) = 2 \cdot m(\sphericalangle 2)$. Cum unghiurile $\hat{1}$ și $\hat{2}$ sunt adiacente suplementare, deci $m(\sphericalangle 1) + m(\sphericalangle 2) = 180^\circ$, rezultă că $180^\circ = 3 \cdot m(\sphericalangle 2)$, adică $m(\sphericalangle 2) = 60^\circ$. Aflăm de aici și $m(\sphericalangle 1) = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$. Unghiul $\hat{3}$ este opus la vârf unghiului $\hat{1}$, așa că $m(\sphericalangle 3) = 120^\circ$, iar unghiul $\hat{4}$ este opus la vârf unghiului $\hat{2}$, așadar $m(\sphericalangle 4) = 60^\circ$.

Tot din ipoteză, $\hat{2} \equiv \hat{8}$. Prin urmare, $m(\sphericalangle 8) = 60^\circ$. Cum unghiurile $\hat{8}$ și $\hat{7}$ sunt adiacente suplementare, calculăm măsura unghiului $\hat{7}$ ca fiind $m(\sphericalangle 7) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Deoarece unghiul $\hat{5}$ este opus la vârf unghiului $\hat{7}$, iar unghiul $\hat{6}$ este opus la vârf unghiului $\hat{8}$, deducem că $m(\sphericalangle 5) = 120^\circ$, iar $m(\sphericalangle 6) = 60^\circ$.

6. Drepte paralele. Axioma paralelelor.

Exercițiul 10, pagina 173

Știind că dreptele AB și EF sunt paralele, iar punctele A, B, D coliniare, deducem că dreptele AD și EF sunt paralele. Luăm un punct G pe dreapta ED , astfel încât punctele G și C să fie de aceeași parte a dreptei AD . Din $AD \parallel EF$ intersectate de secanta EG rezultă că unghiurile $\widehat{BDG}$ și $\widehat{FED}$ sunt congruente (unghiuri corespondente), deci $m(\widehat{BDG}) = 124^\circ$. Știm din ipoteză $BC \parallel DE$, deci $BC \parallel DG$. Dreptele paralele BC și DG intersectate de secanta AD formează unghiuri interne de aceeași parte a secantei suplementare, $m(\widehat{DBC}) + m(\widehat{BDG}) = 180^\circ$. De aici aflăm $m(\widehat{DBC}) = 56^\circ$.

Exercițiul 14, pagina 173

Deoarece suma măsurilor oricăror două unghiuri formate de cele două drepte paralele intersectate cu o secantă este aceeași, deducem că toate unghiurile sunt egale. Având patru unghiuri egale în jurul unui punct, putem calcula măsura unghiurilor ca fiind $360^\circ : 4 = 90^\circ$.

7. Criterii de paralelism.

Exercițiul 3, pagina 176

Cum (OD) este bisectoarea unghiului $\widehat{AOB}$, avem că $m(\widehat{AOD}) = (\widehat{DOB}) = \frac{1}{2}m(\sphericalangle AOB)$. (OE) este bisectoarea unghiului $\widehat{CO'B}$, deci $m(\widehat{CO'E}) = m(\widehat{EO'B}) = \frac{1}{2}m(\sphericalangle CO'B)$. Știm din ipoteză că $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{CO'B})$. Reiese faptul că unghiurile $\widehat{DOB}$ și $\widehat{EO'B}$ sunt congruente. Acestea sunt unghiuri corespondente formate de secanta OB cu dreptele OD și $O'E$. Am demonstrat că dreptele OD și $O'E$ formează cu secanta OB unghiuri corespondente congruente, deci OD și $O'E$ sunt paralele.

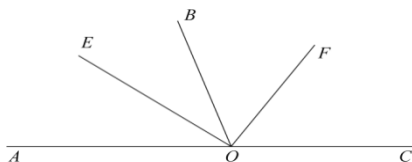
8. Drepte perpendiculare în plan. Distanța de la un punct la o dreaptă.

Exercițiul 15, pagina 184

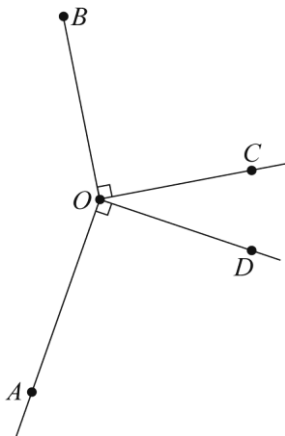
Cum unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt complementare, $m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOC) = 180^\circ$ (1).

Fie (OE) bisectoarea unghiului $\widehat{AOB}$ și (OF) bisectoarea unghiului $\widehat{BOC}$. Atunci $m(\widehat{AOE}) = m(\widehat{EOB}) = \frac{1}{2}m(\sphericalangle AOB)$ (2) și $m(\widehat{BOF}) = (\widehat{FOC}) = \frac{1}{2}m(\sphericalangle BOC)$ (3). Unghiul format de cele două bisectoare este $\sphericalangle EOF$:

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle EOF) &= m(\widehat{EOB}) + m(\widehat{BOF}) \stackrel{(2),(3)}{=} \frac{1}{2}m(\sphericalangle AOB) + \frac{1}{2}m(\sphericalangle BOC) = \\ &= \frac{1}{2}(m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOC)) \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ \end{aligned}$$



Exercițiul 20, pagina 184



Analizăm figura și observăm că $m(\sphericalangle AOD) = 90^\circ$ și $m(\sphericalangle BOC) = 90^\circ$. Cum suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct este 360° , obținem :

$$m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle COD) = 360^\circ - m(\sphericalangle AOD) - m(\sphericalangle BOC), \text{ adică:}$$

$$m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle COD) = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ,$$

$$(1) \quad m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle COD) = 180^\circ.$$

Cum $m(\sphericalangle AOB) = 5 \cdot m(\sphericalangle COD)$, înlocuind în relația (1) obținem:
 $5 \cdot m(\sphericalangle COD) + m(\sphericalangle COD) = 180^\circ$, adică $6 \cdot m(\sphericalangle COD) = 180^\circ$ și
 $m(\sphericalangle COD) = 30^\circ$.

9. Mediatoarea unui segment.

Exercițiul 9, pagina 188

Cum MN este mediatoarea segmentului $[AB]$ și $M \in [AB]$, obținem că M este mijlocul segmentului, deci $AM = MB = \frac{1}{2}AB$. De aici, $AB = 2 \cdot AM = 2 \cdot 2,4 = 4,8$ cm.

Exercițiul 10, pagina 188

Deoarece MN este mediatoarea segmentului AC , dreptele MN și AC sunt perpendiculare, deci unghiurile $\widehat{ANM}$ și $\widehat{MNC}$ sunt congruente și au măsurile egale cu 90° . Știind că $AB \perp AC$, $m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$. Dreptele NM și AB tăiate de secanta AN formează unghiurile $\widehat{BAN}$ și $\widehat{MNA}$, interne de aceeași parte a secantei. Aceste două unghiuri sunt suplementare, având fiecare măsura de 90° , deci dreptele MN și AB sunt paralele.

Exercițiul 11, pagina 188

Deoarece OM este mediatoarea segmentului $[AB]$, unghiurile formate de OM cu AB ($\widehat{AOM}$ și $\widehat{MOB}$) vor avea măsura de 90° .

$m(\widehat{MON}) = 90^\circ - m(\widehat{NOB})$, deci $m(\widehat{MON}) = 90^\circ - 25^\circ$, $m(\widehat{MON}) = 65^\circ$. (OM este bisectoarea unghiului $\widehat{PON}$, deci $m(\widehat{POM}) = m(\widehat{MON}) = 65^\circ$, iar $m(\widehat{AOP}) = m(\widehat{AOM}) - m(\widehat{POM}) = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$).

11. Cercul.

Exercițiul 28, pagina 197

Deoarece punctele A și B sunt diametral opuse, măsura arcului $\widehat{AB}$ va fi de 180° . După ce realizăm desenul conform indicațiilor din cerință, observăm că $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{AD}) + m(\widehat{DC}) + m(\widehat{CB})$. Ipoteza problemei spune că $m(\widehat{AD}) = 5 \cdot m(\widehat{BC}) = \frac{5}{6} \cdot m(\widehat{CD})$, deci $m(\widehat{BC}) = \frac{1}{5} \cdot m(\widehat{AD})$, iar $m(\widehat{CD}) = \frac{6}{5} \cdot m(\widehat{AD})$. Pentru o mai mare ușurință în scriere, vom nota cu litera x măsura arcului $\widehat{AD}$. Obținem astfel $m(\widehat{AD}) = x$, $m(\widehat{BC}) = \frac{1}{5} \cdot x$, $m(\widehat{CD}) = \frac{6}{5} \cdot x$. Obținem: $m(\widehat{AB}) = x + \frac{1}{5} \cdot x + \frac{6}{5} \cdot x$, echivalent cu $180^\circ = x + \frac{1}{5} \cdot x + \frac{6}{5} \cdot x$. Aducând la același numitor în partea

dreaptă, obținem $180^\circ = \frac{5}{5} \cdot x + \frac{1}{5} \cdot x + \frac{6}{5} \cdot x$, deci $180^\circ = \frac{12}{5} \cdot x$ și $x = 180^\circ : \frac{12}{5} = 180^\circ \cdot \frac{5}{12} = 75^\circ$

Atunci, $m(\widehat{AD}) = 75^\circ$, $m(\widehat{BC}) = \frac{75^\circ}{5} = 15^\circ$, $m(\widehat{CD}) = \frac{6}{5} \cdot 75 = 90^\circ$.

Știm că măsura unui arc mic al cercului este egală cu măsura unghiului la centru corespunzător respectivului arc mic. Aflăm de aici că măsura unghiului la centru $\widehat{COD}$ este de 90° , deci OD și OC sunt perpendiculare.

12. Pozițiile unei drepte față de un cerc. Pozițiile relative a două cercuri.

Exercițiul 12, pagina 199

a) Ca cele două cercuri să fie **tangente exterior**, distanța de la centrul primului cerc la centrul celui de-al doilea cerc trebuie să fie egală cu suma lungimilor razelor celor două cercuri. Astfel, $O_1O_2 = 5 \text{ cm} + r$. Știm că $O_1O_2 = 8 \text{ cm}$, aflăm de aici lungimea razei r ca fiind $r = 8 \text{ cm} - 5 \text{ cm}$, $r = 3 \text{ cm}$.

b) Cele două cercuri sunt **exterioare** dacă distanța de la centrul primului cerc la centrul celui de-al doilea cerc este mai mare decât suma lungimii razelor celor două cercuri. Astfel, $O_1O_2 > 5 \text{ cm} + r$, deci $r < 3 \text{ cm}$. Cum r este număr natural nenul, r poate fi de 1 cm sau de 2 cm.

c) Două cercuri sunt **tangente interior** dacă distanța de la centrul primului cerc la centrul celui de-al doilea cerc este egală cu diferența dintre lungimile razelor lor. Astfel, deoarece $O_1O_2 = 8 \text{ cm}$, iar lungimea razei cercului de centru O_1 este de 5 cm, ne dăm seama că $O_1O_2 = r - 5 \text{ cm}$. De aici putem calcula lungimea razei r , $r = 8 \text{ cm} + 5 \text{ cm}$, deci $r = 13 \text{ cm}$.

d) Un cerc este **interior** altui cerc dacă distanța dintre centrele celor două cercuri este mai mică decât diferența lungimilor razelor lor. Cum $O_1O_2 = 8 \text{ cm}$, iar lungimea razei cercului de centru O_1 este de 5 cm, rezultă că $O_1O_2 < r - 5 \text{ cm}$, deci $8 < r - 5 \text{ cm}$. Avem $r > 13 \text{ cm}$, deci lungimea razei r poate fi de 14 cm, 15 cm, 16 cm ș.a.m.d.

Exercițiul 15, pagina 200

Deoarece dreapta AB este tangentă cercului $\mathcal{C}(O, r)$, măsura unghiului $\widehat{ABO}$ va fi de 90° . De asemenea, cum dreapta AC este tangentă cercului $\mathcal{C}(O, r)$, și măsura unghiului $\widehat{ACO}$ va fi tot de 90° . Suma măsurilor unghiurilor $\widehat{ABO}$ și $\widehat{ACO}$ este:

$$m(\widehat{ABO}) + m(\widehat{ACO}) = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ.$$

Arătând că suma măsurilor celor două unghiuri este de 180° , am demonstrat că unghiurile $\widehat{ABO}$ și $\widehat{ACO}$ sunt suplementare.

Capitolul II. Triunghiul.

1. Triunghiul: definiție, elemente, clasificare, perimetru

Exercițiul 5, pagina 203

Triunghiul dat este isoscel, deci are două laturi de lungimi egale. Presupunem că laturile egale măsoară 24 cm . Calculăm perimetrul acestui triunghi isoscel, și obținem rezultatul următor:

$$P = 24\text{ cm} + 24\text{ cm} + 30\text{ cm}, \text{ adică } P = 78\text{ cm}.$$

Observăm că putem alege ca laturile egale să măsoare 30 cm . Astfel, perimetrul acestui triunghi este:

$$P = 24\text{ cm} + 30\text{ cm} + 30\text{ cm}, \text{ adică } P = 84\text{ cm}.$$

Exercițiul 7, pagina 203

Cum lungimile laturilor triunghiului exprimate în centimetri sunt trei numere naturale pare consecutive, acestea vor fi x , $x+2$ și $x+4$. Perimetrul triunghiului este egal cu suma lungimilor tuturor laturilor sale, $P = x + (x + 2) + (x + 4) = 3 \cdot x + 6$. Din ipoteză știm că $P = 108\text{ cm}$. Atunci, obținem că:

$$3 \cdot x + 6\text{ cm} = 108\text{ cm}.$$

De aici avem că: $3 \cdot x = 108\text{ cm} - 6\text{ cm}$, adică $3 \cdot x = 102\text{ cm}$.

Aflăm că $x = \frac{102 \text{ cm}}{3} = 34 \text{ cm}$. Rezultă că unghiurile laturilor triunghiului sunt 34cm, 36cm, 38cm.

2. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi. Unghi exterior unui triunghi

Exercițiul 12, pagina 206

a) Ținând cont de proprietățile triunghiului isoscel, observăm că sunt două cazuri posibile de rezolvare. Presupunem că unghiul opus bazei este $\sphericalangle A$, iar unghiurile de la bază sunt $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle C$. Cum triunghiul este isoscel, măsurile unghiurilor de la bază sunt egale. Obținem: $m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle C)$ (1)

Cazul I: Unghiul cunoscut este opus bazei, $m(\sphericalangle A) = 20^\circ$.

În acest caz, trebuie să determinăm măsura unghiurilor de la bază ($m(\sphericalangle B)$ și $m(\sphericalangle C)$).

Știm că suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este de 180° . Avem relația: $m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) = 180^\circ$

Conform relației (1) putem înlocui $m(\sphericalangle B)$ cu $m(\sphericalangle C)$. Obținem:

$$m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle C) + m(\sphericalangle C) = 180^\circ, \text{ adică } m(\sphericalangle A) + 2 \cdot m(\sphericalangle C) = 180^\circ.$$

$$20^\circ + 2 \cdot m(\sphericalangle C) = 180^\circ \Rightarrow 2 \cdot m(\sphericalangle C) = 180^\circ - 20^\circ \Rightarrow$$

$$2 \cdot m(\sphericalangle C) = 160^\circ \text{ și } m(\sphericalangle C) = 80^\circ = m(\sphericalangle B)$$

Cazul II: Unghiul cunoscut este unul dintre unghiurile de la bază ($m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle C) = 20^\circ$).

Știm că suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este de 180° . Avem $m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) = 180^\circ$, adică $m(\sphericalangle A) + 20^\circ + 20^\circ = 180^\circ$. Atunci $m(\sphericalangle A) + 40^\circ = 180^\circ$ și $m(\sphericalangle A) = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$

4. Inegalități între elementele triunghiului

Exercițiul 15, pagina 212

a) Analizând figura, putem aplica inegalitatea triunghiului pentru a afla valoarea lui x . Conform inegalității triunghiului, avem:

$$5 + 2x < 4 + 8 - x.$$

Obținem $3x < 7$. Cum x este număr natural, avem că $x \in \{0, 1, 2\}$. Valoarea maximă a perimetrului triunghiului ABC se obține atunci când $x = 2$. $P_{ABC} = 4 + 8 - x + 5 + 2x$, deci:

$$P_{ABC} = 4 + 8 - 2 + 5 + 4, P_{ABC} = 19 \text{ unități de lungime.}$$

b) Un triunghi isoscel are două dintre laturi egale. Vom avea trei cazuri:

Cazul I: $[AC] \equiv [BC]$. Avem ecuația $5 + 2x = 8 - x$, de unde obținem rezultatul $x = 1$. Lungimile obținute respectă inegalitatea triunghiului, deci pentru $x = 1$, triunghiul ABC este isoscel.

Cazul II: $[AB] \equiv [AC]$. Avem ecuația $4 = 8 - x$, de unde obținem $x = 4$. Pentru $x = 4$ însă, nu se respectă inegalitatea triunghiului ($4 + 4 < 13$), deci nu putem avea $x = 4$.

Cazul III: $[AB] \equiv [BC]$. Avem ecuația $4 = 5 + 2x$. Observăm că x nu poate fi număr natural în acest caz.

Răspuns: $x = 1$.

5. Linii importante în triunghi

5.1. Bisectoarele unghiurilor unui triunghi. Cercul înscris într-un triunghi

Exercițiul 11, pagina 215

Mai întâi calculăm măsura unghiului $\hat{C}$, care va fi egală cu: $m(\hat{C}) = 180^\circ - m(\hat{A}) - m(\hat{B}) = 180^\circ - 35^\circ - 84^\circ = 61^\circ$. Bisectoarele triunghiului se intersectează în centrul cercului înscris, notat I . Astfel, (BI) , (CI) , (AI) sunt bisectoarele unghiurilor triunghiului și $m(\widehat{ABI}) = m(\widehat{IBC}) = \frac{1}{2}m(\widehat{ABC}) = 42^\circ$, $m(\widehat{ACI}) = m(\widehat{ICB}) = \frac{1}{2}m(\widehat{ACB}) = 30^\circ 30'$, $m(\widehat{BAI}) = m(\widehat{IAC}) = \frac{1}{2}m(\widehat{BAC}) = 17^\circ 30'$. Avem de calculat măsurile unghiurilor $\widehat{AIB}$, $\widehat{AIC}$, $\widehat{BIC}$. În triunghiul ΔAIB , $m(\widehat{AIB}) = 180^\circ - m(\widehat{IBA}) - m(\widehat{IAB})$, deci $m(\widehat{AIB}) = 180^\circ - 42^\circ - 17^\circ 30' = 120^\circ 30'$. În triunghiul ΔAIC , $m(\widehat{AIC}) = 180^\circ - m(\widehat{ICA}) - m(\widehat{IAC})$, deci $m(\widehat{AIC}) = 180^\circ - 30^\circ 30' - 17^\circ 30' = 132^\circ$. În triunghiul ΔBIC , $m(\widehat{BIC}) = 180^\circ - m(\widehat{IBC}) - m(\widehat{ICB})$, deci $m(\widehat{BIC}) = 180^\circ - 42^\circ - 30^\circ 30' = 107^\circ 30'$.

Exercițiul 16, pagina 215

Observăm că dreptele paralele AM și BC , prin intersecție cu secanta AB , dau unghiurile interne de aceeași parte a secantei suplementare $\widehat{MAB}$ și $\widehat{ABC}$. Folosindu-ne de această informație, calculăm măsura unghiului $\widehat{ABC}$: $m(\widehat{ABC}) = 180^\circ - m(\widehat{MAB})$. Cum $m(\widehat{MAB}) = 100^\circ$, $m(\widehat{ABC}) = 80^\circ$. Știm că semidreptele (BI) și (CI) sunt bisectoarele unghiurilor $\widehat{ABC}$, respectiv $\widehat{ACB}$, deci măsurile unghiurilor $\widehat{IBC}$ și $\widehat{ICB}$ vor fi: $m(\widehat{IBC}) = 40^\circ$, $m(\widehat{ICB}) = 35^\circ$. În ΔBIC , $m(\widehat{BIC}) = 180^\circ - m(\widehat{IBC}) - m(\widehat{ICB})$, $m(\widehat{BIC}) = 180^\circ - 35^\circ - 40^\circ$, $m(\widehat{BIC}) = 105$.

5.3. Înălțimile unui triunghi

Exercițiul 12, pagina 219

Cum H este ortocentrul triunghiului ABC , BD este înălțime și $BD \perp AC$, deci $m(\widehat{ADB}) = 90^\circ$. În triunghiul $\triangle DAB$, $m(\widehat{ADB}) = 90^\circ$, iar măsura unghiului $\widehat{DAB}$ este de 65° (ipoteză). Putem calcula măsura unghiului $\widehat{DBA}$: $m(\widehat{DBA}) = 180^\circ - 155^\circ$, $m(\widehat{DBA}) = 25^\circ$. Dreptele AM și DB sunt paralele și, tăiate de secanta AB formează unghiurile alterne interne congruente, $\widehat{MAB}$ și $\widehat{DBA}$, deci $m(\widehat{MAB}) = m(\widehat{DBA}) = 25^\circ$.

Fie $CH \cap AB = \{E\}$. Analog demonstrației anterioare, CH e înălțime și $m(\widehat{AEC}) = 90^\circ$. În triunghiul $\triangle CAE$, $m(\widehat{CEA}) = 90^\circ$ și $m(\widehat{CAE}) = 65^\circ$, deci $m(\widehat{ACE}) = 180^\circ - 155^\circ$, $m(\widehat{ACE}) = 25^\circ$. Cum punctele C, H, E sunt coliniare, fiind situate pe înălțimea CE , rezultă că $m(\widehat{ACH}) = 25^\circ$.

5.4. Medianele unui triunghi

Exercițiul 13, pagina 220

a) Deoarece AD este mediană, iar $m(\widehat{ADB}) = 90^\circ$, rezultă că AD este mediatoarea segmentului $[BC]$. Dreapta BE este la rândul ei mediatoare, deci intersecția lor, notată cu M , va fi centrul cercului circumscris triunghiului ABC . Segmente $[MA]$, $[MB]$ și $[MC]$ sunt razele cercului circumscris triunghiului ABC , deci au aceeași lungime. Reiese de aici faptul că $[MA] \equiv [MB] \equiv [MC]$.

b) Cum M este centrul cercului circumscris, rezultă că CF este mediatoarea segmentului $[AB]$. Atunci F va fi mijlocul segmentului $[AB]$, iar $[FA] \equiv [FB]$.

c) CF este mediatoarea segmentului $[AB]$, iar punctele C, M și F sunt coliniare, rezultă că $CM \perp AB$.

6. Congruența triunghiurilor oarecare

Exercițiul 19, pagina 227

Ne vom folosi de informațiile din ipoteză. Astfel, deoarece AC este bisectoarea unghiului $\widehat{DAB}$, unghiurile $\widehat{DAC}$ și $\widehat{CAB}$ sunt congruente. De asemenea, știm că CA este bisectoarea unghiului $\widehat{DCB}$, deci și unghiurile $\widehat{DCA}$ și $\widehat{ACB}$ vor fi congruente.

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{DAC} \equiv \widehat{CAB} \\ [AC] \text{ latură comună} \\ \widehat{DCA} \equiv \widehat{ACB} \end{array} \right\} \xRightarrow{U.L.U.} \Delta ABC \equiv \Delta ADC.$$

Exercițiul 23, pagina 228

Dreptele paralele AD și BC tăiate de secanta AB formează unghiurile alterne interne congruente $\widehat{DAB}$ și $\widehat{ABC}$. Dreptele paralele DB și AC tăiate de secanta AB dau unghiurile alterne interne congruente $\widehat{DBA}$ și $\widehat{BAC}$.

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{DAB} \equiv \widehat{ABC} \\ [AB] \text{ latură comună} \\ \widehat{DBA} \equiv \widehat{BAC} \end{array} \right\} \xRightarrow{U.L.U.} \Delta DAB \equiv \Delta ABC.$$

7. Congruența triunghiurilor dreptunghice

Exercițiul 8, pagina 230

Urmărim să ne încadrăm în unul din cazurile cunoscute de congruență a triunghiurilor dreptunghice, $C.C.$, $C.U.$, $I.U.$, $I.C.$.

Observăm faptul că unghiurile $\widehat{AEC}$ și $\widehat{BED}$ sunt opuse la vârf, deci congruente. În triunghiul ΔAEC dreptunghic, $m(\widehat{ACE}) = 90^\circ - m(\widehat{AEC})$. În triunghiul ΔBED dreptunghic, $m(\widehat{BDE}) = 90^\circ - m(\widehat{BED})$. Obținem de aici că $m(\widehat{ACE}) = m(\widehat{BDE})$, deci $\widehat{ACE} \equiv \widehat{BDE}$.

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{ACE} \equiv \widehat{BDE} \\ m(\widehat{CAE}) = m(\widehat{DBE}) = 90^\circ \\ [AC] \equiv [BD] \end{array} \right\} \xRightarrow{C.U.} \Delta ACE \equiv \Delta BDE$$

8. Metoda triunghiurilor congruente

Exercițiul 37, pagina 235

Pentru a demonstra că punctele M , O și N sunt coliniare, vom încerca să arătăm că măsura unghiului $\widehat{MON}$ este de 180° . Știm deja că $\widehat{AOP}$ este unghi drept, din faptul că unghiurile $\widehat{xOy}$ și $\widehat{yOz}$ sunt complementare. Căutăm o cale de a arăta că suma măsurilor unghiurilor $\widehat{AON}$ și $\widehat{POM}$ este de 90° .

În triunghiurile $\triangle BOP$ și $\triangle POM$, deoarece M este simetricul lui B față de dreapta OC , avem că dreapta OC este mediatoarea dreptei BM . Constatăm că triunghiurile sunt congruente, conform cazului C.C. :

$$\left. \begin{array}{l} PO \text{ catetă comună} \\ m(\widehat{BPO}) = m(\widehat{MPO}) = 90^\circ \\ [BP] \equiv [PM] \end{array} \right\} \xRightarrow{C.C.} \triangle BOP \equiv \triangle MOP \Rightarrow \widehat{BOP} \equiv \widehat{POM}.$$

În triunghiurile $\triangle BOQ$ și $\triangle QON$, deoarece N este simetricul lui B față de dreapta OA , avem că dreapta OA este mediatoarea dreptei BN . Constatăm că triunghiurile sunt congruente, conform cazului C.C. :

$$\left. \begin{array}{l} QO \text{ catetă comună} \\ m(\widehat{BQO}) = m(\widehat{NQO}) = 90^\circ \\ [BQ] \equiv [QN] \end{array} \right\} \xRightarrow{C.C.} \triangle BOQ \equiv \triangle NOQ \Rightarrow \widehat{BOQ} \equiv \widehat{NOQ}$$

$$\begin{aligned} m(\widehat{MON}) &= m(\widehat{QON}) + m(\widehat{BOQ}) + m(\widehat{BOP}) + m(\widehat{POM}) = \\ &= m(\widehat{BOQ}) + m(\widehat{BOQ}) + m(\widehat{BOP}) + m(\widehat{BOP}) = 2 \cdot m(\widehat{BOQ}) + 2 \cdot m(\widehat{BOP}) = 2 \cdot \\ &= (m(\widehat{BOQ}) + m(\widehat{BOP})) = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ \end{aligned}$$

Am demonstrat că unghiul $\widehat{MON}$ este alungit, de unde rezultă că punctele M , O și N sunt coliniare.

Exercițiul 40, pagina 235

Arătăm că triunghiurile $\triangle AOC$ și $\triangle BOD$ sunt congruente:

$$\left. \begin{array}{l} \sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle DOB \text{ (coincid)} \\ m(\widehat{ACO}) = m(\widehat{BDO}) = 90^\circ \\ [AO] \equiv [BO] \end{array} \right\} \xRightarrow{I.U.} \triangle AOC \equiv \triangle BOD$$

Din congruența celor două triunghiuri obținem că unghiurile $\widehat{OAC}$ și $\widehat{OBD}$ sunt congruente. De asemenea, și segmentele $[OC]$ și $[OD]$ sunt congruente. Din congruența lui $[OC]$ cu $[OD]$ putem demonstra că $[AD]$ și $[BC]$ sunt la rândul lor congruente.

$$\left. \begin{array}{l} AD = AO - OD \\ BC = BO - OC \\ [AO] \equiv [BO] \end{array} \right\} \Rightarrow [AD] \equiv [BC]$$

$$\left. \begin{array}{l} \sphericalangle OAC \equiv \sphericalangle OBD \\ m(\widehat{ADM}) = m(\widehat{BCM}) = 90^\circ \\ [AD] \equiv [BC] \end{array} \right\} \xRightarrow{C.U.} \Delta ADM \equiv \Delta BCM$$

Din congruența triunghiurilor ΔADM și ΔBCM rezultă faptul că segmentele $[MC]$ și $[MD]$ sunt congruente. $[MC]$ și $[MD]$ sunt perpendicularele duse din M pe laturile $(OB$ și $(OA$, deci reprezintă distanța de la M la laturile $(OB$ și $(OA$. Fiind situat la aceeași distanță de $(OB$ și $(OA$, laturile unghiului $\widehat{XOY}$, deducem că punctul M se găsește pe bisectoarea unghiului $\widehat{XOY}$.

Exercițiul 42, pagina 235

În triunghiul ΔABC isoscel cu $[AB] \equiv [AC]$, trasăm înălțimea AD , $D \in BC$.

$$\left. \begin{array}{l} [AB] \equiv [AC] \\ [AD] \text{ latură comună} \\ m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{ADC}) = 90^\circ \end{array} \right\} \xRightarrow{I.C.} \Delta ABD \equiv \Delta ACD.$$

Din congruența celor două triunghiuri, obținem că unghiurile $\widehat{ABD}$ și $\widehat{ACD}$ sunt congruente. Deoarece B , D și C sunt coliniare (aparțin laturii BC a triunghiului ΔABC), unghiul $\widehat{ABD}$ coincide cu unghiul $\widehat{ABC}$, iar unghiul $\widehat{ACD}$ coincide cu unghiul $\widehat{ACB}$. Am demonstrat astfel că unghiurile $\widehat{ABC}$ și $\widehat{ACB}$ ale triunghiului isoscel ΔABC sunt congruente.

9. Proprietățile triunghiului isoscel

Exercițiul 7, pagina 239

Triunghiul ABC este isoscel de bază $[AC]$, deci unghiurile $\sphericalangle ACB$ și $\sphericalangle BAC$ sunt congruente. Dreptele paralele, MN și AC , formează cu secanta BC unghiurile corespondente congruente, $\sphericalangle MNB$ și $\sphericalangle ACN$, iar cu secanta AB , unghiurile corespondente congruente, $\sphericalangle NMB$ și $\sphericalangle CAB$. Cum avem că $\sphericalangle MNB \equiv \sphericalangle NMB$, rezultă că ΔBMN este isoscel.

Exercițiul 8, pagina 239

Construim $\triangle ABC$ isoscel și înălțimile $BD, D \in [AC]$ și $CE, E \in [AB]$. Cum înălțimea este segmentul care pleacă din vârful unui triunghi și este perpendiculară pe dreapta opusă vârfului, încercăm să apelăm la cazurile de congruență ale triunghiurilor dreptunghice. Astfel:

$$\left. \begin{array}{l} \sphericalangle B \equiv \sphericalangle C \\ BC \text{ latură comună} \\ m(\sphericalangle BEC) = m(\sphericalangle BDC) = 90^\circ \end{array} \right\} \stackrel{I.U.}{\Rightarrow} \triangle BDC \equiv \triangle BEC$$

Rezultă că $[BD] \equiv [CE]$.

Exercițiul 17, pagina 240

Din $AD \perp MN$, $[AD]$ fiind bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$ reiese că triunghiul $\triangle AMN$ este isoscel, cu $[AM] \equiv [AN]$. În acest triunghi, AD e bisectoare și înălțime, deci va fi și mediană. Fie $AD \cap MN = \{P\}$. Atunci, $[MP] \equiv [NP]$. În triunghiul DMN , DP este mediană și înălțime, deci triunghiul e isoscel de bază $[MN]$.

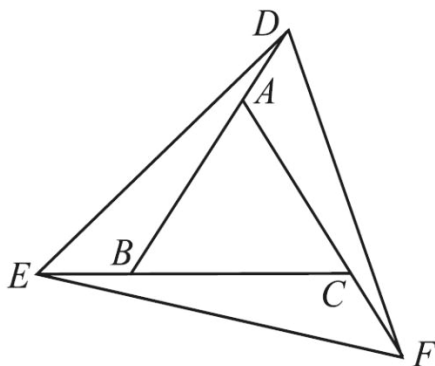
Exercițiul 18, pagina 240

În triunghiul $\triangle CBM$, observăm că $[BN]$ este atât bisectoare, cât și înălțime. Rezultă de aici faptul că $\triangle CBM$ este triunghi isoscel, cu $[BC] \equiv [BM]$, iar $[BN]$ mediatoare. Din $[BN]$ mediatoare, avem că $[MN] \equiv [NC]$ deci $[DN]$ va fi mediană. În triunghiul $\triangle DMC$, $[DN]$ este mediană și înălțime, deci triunghiul $\triangle DMC$ va fi isoscel de bază $[MC]$. Obținem de aici că $[DM] \equiv [DC]$.

10. Proprietățile triunghiului echilateral

Exercițiul 12, pagina 242

Vom încerca să demonstrăm că $\triangle EBD$, $\triangle DAF$ și $\triangle ECF$ sunt congruente.



Folosindu-ne de *Teorema unghiului exterior*, obținem că:

$$m(\sphericalangle EBD) = m(\sphericalangle BAC) + m(\sphericalangle BCA), \text{ adică } m(\sphericalangle EBD) = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$$

În mod similar se arată și că $m(\sphericalangle DAF) = m(\sphericalangle ECF) = 120^\circ$.

$$\left. \begin{array}{l} BD = AD + AB \\ EC = EB + BC \\ AF = CF + AC \end{array} \right\} \begin{array}{l} AD=EB=CF \\ AB=BC=AC \end{array} \Rightarrow BD = EC = AF$$

$$\left. \begin{array}{l} [EB] \equiv [AD] \equiv [CF] \\ \sphericalangle EBD \equiv \sphericalangle DAF \equiv \sphericalangle ECF \\ [BD] \equiv [AF] \equiv [EC] \end{array} \right\} \xrightarrow{L.U.L.} \triangle EBD \equiv \triangle DAF \equiv \triangle FCE$$

Rezultă că $ED = EF = DF$, și deci că $\triangle DEF$ este echilateral.

Exercițiul 15, pagina 243

Dacă distanța de la punctul D la vârfurile B și C este egală, atunci D se află pe mediatoarea laturii BC (*proprietatea punctelor de pe mediatoarea unui segment*). În orice triunghi echilateral, mediatoarea este și bisectoare. Rezultă că $m(\sphericalangle BAD) = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

Exercițiul 16, pagina 243

Din datele problemei, avem că $[DA] \equiv [AC]$ și $[DB] \equiv [BC]$, deci triunghiurile DAC și DBC sunt isoscele. Atunci (AM este bisectoare în triunghiul isoscel $\triangle DAC$, iar (MB este bisectoare în triunghiul isoscel $\triangle DBC$. Fiind biseptoarele unghiului opus bazei unui triunghi isoscel, AM și MB vor fi perpendiculare pe CD . Notăm această observație cu (1):

$$(1) AM \perp CD, MB \perp CD.$$

De asemenea, AM și MB sunt medianele laturii CD , deci vom avea că $[MD] \equiv [MC]$. Notăm această relație cu (2):

$$(2) [MD] \equiv [MC].$$

Din (2), obținem că EM este mediană în triunghiul echilateral $\triangle EDC$, deci $EM \perp CD$. Notăm această concluzie cu (3):

$$(3) EM \perp CD.$$

Din (1) și (3) obținem că punctele E, B, M, A sunt coliniare, deoarece EM, BM și AM sunt perpendiculare pe CD și mediatoare în triunghiurile corespunzătoare lor.

Exercițiul 17, pagina 243

Triunghiul MQR este echilateral, deci echilateral avem $[MR] \equiv [MQ] \equiv [RQ]$ și $m(\sphericalangle QRM) = m(\sphericalangle MQR) = m(\sphericalangle RMQ) = 60^\circ$.

Triunghiul MOP este echilateral, deci echilateral avem $[MO] \equiv [MP] \equiv [OP]$ și $m(\sphericalangle MOP) = m(\sphericalangle MPO) = m(\sphericalangle OMP) = 60^\circ$.

$$\left. \begin{array}{l} MQ \equiv MN - QN \\ PN \equiv MN - MP \\ MP \equiv QN \text{ (ipoteză)} \end{array} \right\} \Rightarrow MQ \equiv PN.$$

$$m(\sphericalangle OMR) = m(\sphericalangle OMP) + m(\sphericalangle PMR), \text{ deci } m(\sphericalangle OMR) = 120^\circ.$$

$$m(\sphericalangle OPN) = 180^\circ - m(\sphericalangle OPM), \text{ deci } m(\sphericalangle OPN) = 120^\circ.$$

$$m(\sphericalangle NQR) = 180^\circ - m(\sphericalangle MQR), \text{ deci } m(\sphericalangle NQR) = 120^\circ.$$

$$\left. \begin{array}{l} [MR] \equiv [PN] \equiv [RQ] \\ \sphericalangle OMR \equiv \sphericalangle OPN \equiv \sphericalangle NQR \\ [MO] \equiv [OP] \equiv [NQ] \end{array} \right\} \xrightarrow{L.U.L.} \Delta RMO \equiv \Delta NPO \equiv \Delta RQN$$

Din congruența celor trei triunghiuri, obținem că $[OR] \equiv [ON] \equiv [NR]$, deci triunghiul ΔNOR este echilateral, având toate cele trei laturi congruente.

11. Proprietățile triunghiului dreptunghic

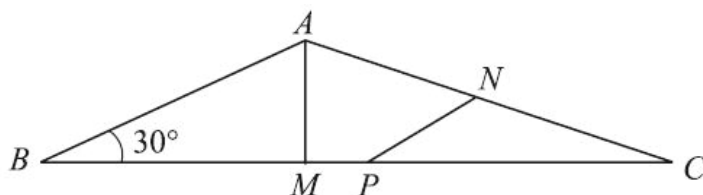
Exercițiul 4, pagina 245

Din *Teorema medianei* avem relația $AA' = \frac{BC}{2}$, adică $2 \cdot AA' = BC$. Rezultă că $BC = 2 \cdot 6 \text{ cm} = 12 \text{ cm}$.

Cum $m(\sphericalangle B)$ este egală cu $90^\circ - m(\sphericalangle C)$, adică $m(\sphericalangle B) = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, putem aplica *Teorema unghiului de 30°* . Din această teoremă obținem că $AC = \frac{BC}{2}$, adică $AC = \frac{12 \text{ cm}}{2} = 6 \text{ cm}$.

Exercițiul 11, pagina 246

Cum AM este înălțime în triunghiul ABC , rezultă că este perpendiculară pe latura BC . Astfel, triunghiul ΔABM este dreptunghic în M .



Cum măsura unghiului $\widehat{ABM}$ este de 30° , putem aplica *Teorema unghiului de 30°* în triunghiul ΔABM . Obținem că $AM = \frac{AB}{2}$.

Cum NP este linie mijlocie în triunghiul ΔABC , rezultă că $NP = \frac{AB}{2}$.

Obținem că: $AM + NP = \frac{AB}{2} + \frac{AB}{2} = \frac{2AB}{2} = AB$.

Exercițiul 36, pagina 248

Triunghiul $\triangle ABC$ este isoscel, cu laturile congruente AB și AC , iar AD este înălțimea sa. Rezultă că AD este și mediatoarea laturii BC , deci vom avea că $[BD] \equiv [DC]$.

Se specifică în cerință faptul că $BD = \frac{AB}{2}$. Deoarece BD și DC sunt congruente, putem scrie $DC = \frac{AB}{2}$. Cum triunghiul $\triangle ABC$ este isoscel, iar $[AB] \equiv [AC]$, înlocuim pe AB cu AC în proporție și avem $DC = \frac{AC}{2}$, de unde obținem, prin aducere la același numitor, $AC = 2 \cdot DC$.

Exercițiul 37, pagina 248

Unghiurile ascuțite ale triunghiului $\triangle ABC$ sunt $\widehat{ABC}$ și $\widehat{ACB}$. Știm din ipoteză că între unghiurile ascuțite ale triunghiului există un raport de inversă proporționalitate. Facem o alegere și scriem $m(\hat{B}) = \frac{1}{2} \cdot m(\hat{C})$. Deoarece triunghiul $\triangle ABC$ este dreptunghic, știm că:

$$m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 90^\circ.$$

Din raportul de inversă proporționalitate, obținem că:

$$m(\hat{C}) = 2 \cdot m(\hat{B}).$$

Înlocuim în suma măsurilor unghiurilor ascuțite și obținem:

$$m(\hat{B}) + 2 \cdot m(\hat{B}) = 90^\circ.$$

De aici, calculăm $m(\hat{B}) = \frac{90^\circ}{3}$, deci $m(\hat{B}) = 30^\circ$.

Avem un unghi de 30° într-un triunghi dreptunghic, deci putem aplica *Teorema unghiului de 30°* , conform căreia lungimea laturii AC este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei BC . Astfel, am demonstrat că triunghiul are o latură, și anume ipotenuza BC , cu lungimea de două ori mai mare decât lungimea altei laturi (cateta AC , opusă unghiului de 30°).

