

Matematică pentru clasa a VII-a

Metode explicite de rezolvare
pentru
principalele tipuri de exerciții

Editura Booklet
www.booklet.ro

Pentru comenzi:
tel: 021 430. 3095
021 440. 1002
e-mail: comenzi@booklet.ro

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Matematică : clasa a VII-a : metode explicite de rezolvare pentru
principalele tipuri de exerciții. - București : Booklet, 2019
ISBN 978-606-590-757-7

51

Redactor: Mihail Săndulescu
Copertă: Andreea Alexandra Vraja

©Editura Booklet 2019
Toate drepturile asupra lucrării aparțin editurii

ALGEBRĂ

Capitolul I. Mulțimea numerelor reale

1. Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural

Exercițiul 3, pagina 12

a) Aflăm care sunt pătratele perfecte prin calcul direct și le selectăm pe cele de două cifre:

$$0 = 0 \cdot 0$$

$$1 = 1 \cdot 1$$

$$4 = 2 \cdot 2$$

$$9 = 3 \cdot 3$$

$$16 = 4 \cdot 4$$

$$25 = 5 \cdot 5$$

$$36 = 6 \cdot 6$$

$$49 = 7 \cdot 7$$

$$64 = 8 \cdot 8$$

$$81 = 9 \cdot 9$$

$$100 = 10 \cdot 10$$

Ne oprim, deoarece deja am obținut o valoare de trei cifre. Răspunsul este mulțimea formată din elementele $\{16, 25, 36, 49, 64, 81\}$.

Exercițiul 5, pagina 12

a) Descompunem numărul în factori primi, adică îl împărțim la divizorii săi numere prime până obținem 1:

$$324|2$$

$$162|2$$

$$81|3$$

$$27|3$$

$$9|3$$

$$3|3$$

$$1$$

Obținem:

$$324 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2.$$

Păstrăm o singură dată termenii care apar scriși la puterea a doua și obținem:

$$\sqrt{324} = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18.$$

b) Descompunerea în factori primi este:

$$\begin{array}{r} 1225 \mid 5 \\ 245 \mid 5 \\ 49 \mid 7 \\ 7 \mid 7 \\ 1 \end{array}$$

Adică numărul 1225 este egal cu:

$$1225 = 5^2 \cdot 7^2.$$

Păstrăm o singură dată termenii care apar scriși la puterea a doua și obținem:

$$\sqrt{1225} = 5 \cdot 7 = 35.$$

Exercițiul 24, pagina 14

a) $\sqrt{1 + 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + \dots + 2 \cdot 3^{2019}} = 3^x$

Vrem să scăpăm de radicalul din partea stângă a egalității, pentru a putea calcula valoarea lui x . Ridicarea la pătrat a ambilor termeni ai egalității duce la calcule complicate. Observăm însă că sub radical am putea ajunge la o formă mai simplă de scriere a expresiei, folosind artificii de calcul.

Pasul I: Îl putem da factor comun pe 2. Obținem:

$$1 + 2 \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2019})$$

Pasul II: Dând factor comun 2, am ajuns la o sumă de termeni aflați în progresie geometrică, cu rația 3. Aplicăm formula sumei primilor n termeni ai unei progresii geometrice în paranteză. Atenție! Progresia geometrică are 2020 de termeni, nu 2019, deoarece primul său termen este 3^0 :

$$1 + 2 \cdot \left(\frac{1 - 3^{2020}}{1 - 3} \right)$$

Adică:

$$1 + 2 \cdot \left(\frac{(-1) \cdot (3^{2020} - 1)}{(-1) \cdot (3 - 1)} \right)$$

Echivalent cu:

$$1 + 2 \cdot \left(\frac{3^{2020} - 1}{2} \right)$$

Înmulțim cu 2 și obținem:

$$1 + 3^{2020} - 1$$

Adică:

$$3^{2020}$$

Pasul III: Am reușit să calculăm suma de sub radical. Rescriem egalitatea inițială, ținând cont de rezultatul obținut:

$$\sqrt{3^{2020}} = 3^x$$

Pasul IV: Extragem radical și finalizăm calculul:

$$\sqrt{3^{2020}} = 3^{2020 \cdot \frac{1}{2}} = 3^{1010}$$

Am obținut că:

$$3^{1010} = 3^x$$

Deoarece baza este un număr natural, exponenții sunt egali. Am reușit să aflăm:

$$x = 1010$$

2. Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional

Exercițiul 3, pagina 15

a) $\sqrt{2704}$

Pasul I: Grupăm numărul de sub radical în grupe de câte două cifre, pornind de la ultima cifră a numărului către prima.

$$\sqrt{27'04}$$

Pasul II: Căutăm un număr care, înmulțit cu el însuși, să se cuprindă în prima grupă de cifre (în cazul nostru, grupa este formată din numărul 27). Numărul căutat este 5.

Pasul III: Înmulțim numărul 5 cu el însuși și îl scădem din numărul 27.

$$\begin{array}{r} \sqrt{27'04} \quad 5 \\ \underline{25} \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} \sqrt{27'04} \quad 5 \\ \underline{25} \\ 2 \end{array}$$

Pasul IV: Coborâm următoarea grupă de 2 cifre.

$$\begin{array}{r} \sqrt{27'04} \quad 5 \\ \underline{25} \\ =204 \end{array}$$

Pasul V: Îl dublăm pe 5 și îl coborâm.

$$\begin{array}{r} \sqrt{27'04} \quad 5 \\ \underline{25} \\ =204 10 \end{array}$$

Pasul VI: Căutăm un număr care, pus lângă 10 și înmulțit cu el, să se cuprindă în numărul format (în cazul nostru, în 204).

$$\begin{array}{r} \sqrt{27'04} \quad 5 \\ \underline{25} \\ =204 10 _ \end{array}$$

Numărul pe care îl căutăm, în acest caz, este 2.

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{27'04} \quad 5 \\
 \underline{25} \\
 =204 \quad 102 \cdot 2 = 204 \\
 \underline{204} \\
 ===
 \end{array}$$

Pasul VII: Urcăm lângă 5 numărul găsit (adică 2).

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{27'04} \quad 52 \\
 \underline{25} \\
 =204 \quad 102 \cdot 2 = 204 \\
 \underline{204} \\
 ===
 \end{array}$$

Rezultă că $\sqrt{2704} = 52$.

3. Scoaterea factorilor de sub radical. Introducerea factorilor sub radical

Exercițiul 1, pagina 16

a) $\sqrt{3^2 \cdot 5}$

De sub radical vor ieși doar termenii care sunt ridicați la puterea a doua. Atenție, rădăcina pătrată a unui număr real este întotdeauna număr pozitiv. $\sqrt{x^2} = |x|$, pentru orice x număr real. În cazul nostru, putem scoate doar termenul 3 de sub radical. Obținem:

$$\sqrt{3^2 \cdot 5} = |3|\sqrt{5} = 3\sqrt{5}.$$

Analog, obținem:

$$\sqrt{7^2 \cdot 2} = |7|\sqrt{2} = 7\sqrt{2}.$$

$$\sqrt{15^2 \cdot 3} = |15|\sqrt{3} = 15\sqrt{3}.$$

$$\sqrt{21^2 \cdot 7} = |21|\sqrt{7} = 21\sqrt{7}.$$

Exercițiul 2, pagina 16

a) $3\sqrt{2}$

Atunci când introducem termenii sub radical, aceștia se ridică la puterea a doua. Obținem:

$$3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{18}.$$

$$5\sqrt{2} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{50}.$$

$$2\sqrt{13} = \sqrt{2^2 \cdot 13} = \sqrt{4 \cdot 13} = \sqrt{52}.$$

$$7\sqrt{3} = \sqrt{7^2 \cdot 3} = \sqrt{49 \cdot 3} = \sqrt{147}.$$

$$9\sqrt{2} = \sqrt{9^2 \cdot 2} = \sqrt{81 \cdot 2} = \sqrt{162}.$$

4. Numere iraționale. Mulțimea numerelor reale.

Incluziunile $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Exercițiul 3, pagina 18

b) Pentru a găsi numere iraționale cuprinse între numerele 4 și 5 vom căuta rădăcini pătrate ale numerelor prime cuprinse între pătratele celor două numere date. În cazul nostru, între numerele 16 și 25.

Astfel, găsim numerele: $\sqrt{17}, \sqrt{19}, \sqrt{23}$.

Exercițiul 5, pagina 18

Pentru a afla elementele mulțimii A , rezolvăm întâi relația dată de A în mulțimea numerelor reale. Astfel, avem de rezolvat:

$$3 \leq \sqrt{x} \leq 5$$

Pentru a „scăpa” de radicalul numărului x ridicăm întreaga relație la puterea a doua. Obținem:

$$3^2 \leq (\sqrt{x})^2 \leq 5^2, \text{ echivalentă cu } 9 \leq x \leq 25.$$

Am aflat că x poate fi orice număr **real** de la 9 la 25, însă mulțimea A este formată doar din numerele **naturale** de la 9 la 25.

Obținem:

$$A = \{9, 10, 11, 12, 13, \dots, 25\}.$$

5. Modulul unui număr real: definiție, proprietăți

Exercițiul 2, pagina 19

b) $|x + 1| = \sqrt{3}$

Avem două cazuri, deoarece numărul din modul ($x + 1$) poate fi atât pozitiv, cât și negativ. Pentru rezolvarea exercițiului, trebuie analizate ambele.

Cazul I: Numărul din modul este pozitiv. Avem:

$$|x + 1| = \sqrt{3}, \text{ echivalent cu } x + 1 = \sqrt{3}, \text{ de unde rezultă că } x = \sqrt{3} - 1.$$

Cazul II: Numărul din modul este negativ. Avem:

$$|x + 1| = \sqrt{3}, \text{ echivalent cu } -(x + 1) = \sqrt{3}, \text{ adică } -x - 1 = \sqrt{3}.$$

Avem că $-x = \sqrt{3} + 1$. Înmulțim cu -1 întreaga relație și obținem că:

$$x = -(\sqrt{3} + 1), \text{ deci } x = -\sqrt{3} - 1.$$

Exercițiul 5, pagina 20

a) $4\sqrt{15} - 15$

Ne folosim de faptul că $15 = \sqrt{15} \cdot \sqrt{15}$. Putem rescrie ecuația inițială:

$$4\sqrt{15} - 15 = 4\sqrt{15} - \sqrt{15} \cdot \sqrt{15}$$

Dăm factor comun pe $\sqrt{15}$ și obținem:

$$\sqrt{15}(4 - \sqrt{15})$$

Știm că $\sqrt{15}$ este un număr pozitiv, trebuie să studiem semnul parantezei ($4 - \sqrt{15}$) pentru a afla dacă expresia inițială este pozitivă sau negativă.

Observăm că $4 \cdot 4 = 16$, deci $\sqrt{16} = 4$. Deoarece $16 > 15$, iar $\sqrt{16}$ și $\sqrt{15}$ sunt numere pozitive, atunci și $\sqrt{16} > \sqrt{15}$, adică $4 > \sqrt{15}$. De aici obținem că:

$$4 - \sqrt{15} > 0$$

Deoarece ($4 - \sqrt{15}$) și $\sqrt{15}$ sunt numere pozitive, iar produsul a două numere pozitive este tot un număr pozitiv, obținem că $\sqrt{15}(4 - \sqrt{15}) > 0$.

Am arătat astfel că $4\sqrt{15} - 15 > 0$.

6. Compararea și ordonarea numerelor reale. Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor prin aproximări

Exercițiul 1, pagina 20

a) Pentru a putea ordona numerele, introducem factorii din fața radicalului sub radical. Atunci când introducem factorii sub radical, aceștia se ridică la puterea a doua. Astfel:

$$5\sqrt{2} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{50}.$$

$$7 = \sqrt{7^2} = \sqrt{49}.$$

$$2\sqrt{11} = \sqrt{2^2 \cdot 11} = \sqrt{4 \cdot 11} = \sqrt{44}.$$

$$4\sqrt{3} = \sqrt{4^2 \cdot 3} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{48}.$$

$$2\sqrt{13} = \sqrt{2^2 \cdot 13} = \sqrt{4 \cdot 13} = \sqrt{52}.$$

Acum putem ordona crescător numerele:

$$\sqrt{44} < \sqrt{48} < \sqrt{49} < \sqrt{50} < \sqrt{52}, \text{ deci:}$$

$$2\sqrt{11} < 4\sqrt{3} < 7 < 5\sqrt{2} < 2\sqrt{13}.$$

7. Operații cu numere reale

7.1. Adunarea și scăderea numerelor reale

Exercițiul 1, pagina 21

a) $2\sqrt{7} + 3\sqrt{7}$

Observăm că ambii termeni ai adunării sunt formați dintr-un produs între un număr natural și un număr irațional, anume $\sqrt{7}$. Putem da factor comun pe $\sqrt{7}$:

$$2\sqrt{7} + 3\sqrt{7} = (2 + 3)\sqrt{7} = 5\sqrt{7}.$$

b) $9\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = (9 - 5)\sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$

d) $\frac{2\sqrt{5}}{3} + \frac{\sqrt{5}}{6}.$

Aducem fracțiile la același numitor, apoi efectuăm adunarea:

$$^2) \frac{2\sqrt{5}}{3} + \frac{\sqrt{5}}{6} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{5}}{6} + \frac{\sqrt{5}}{6} = \frac{4\sqrt{5}}{6} + \frac{\sqrt{5}}{6} = \frac{(4+1)\sqrt{5}}{6} = \frac{5\sqrt{5}}{6}.$$

Exercițiul 5, pagina 22

a) $\sqrt{48} + \sqrt{75}$:

Pasul I: Scoatem factorii de sub radicali:

$$\begin{aligned}\sqrt{48} + \sqrt{75} &= \sqrt{16 \cdot 3} + \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{4 \cdot 4 \cdot 3} + \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 3} + 5\sqrt{3} = \\ &= 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 4\sqrt{3} + 5\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Pasul II: Efectuăm calculele:

$$4\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = (4 + 5)\sqrt{3} = 9\sqrt{3}.$$

$\sqrt{192} - \sqrt{27}$:

Pasul I: Scoatem factorii de sub radicali:

$$\begin{aligned}\sqrt{192} - \sqrt{27} &= \sqrt{64 \cdot 3} - \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 3} - \sqrt{3^2 \cdot 3} = \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 8\sqrt{3} - 3\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Pasul II: Efectuăm calculele:

$$8\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = (8 - 3)\sqrt{3} = 5\sqrt{3}.$$

7.2. Înmulțirea și împărțirea numerelor reale

Observație: La înmulțirea/împărțirea numerelor reale care conțin radicali, se înmulțesc/împart factorii de sub radical între ei (sub un singur radical), iar coeficienții radicalilor între ei (în afara radicalilor).

Exercițiul 1, pagina 23

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}$:

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{5 \cdot 2} = \sqrt{10}.$$

d) $6\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{2}$:

$$6\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{2} = 6 \cdot 3\sqrt{6 \cdot 2} = 18\sqrt{12}.$$

Exercițiul 2, pagina 23

a) $\sqrt{15} : \sqrt{3} :$

$$\sqrt{15} : \sqrt{3} = \sqrt{\frac{15}{3}} = \sqrt{5}.$$

d) $15\sqrt{6} : (3\sqrt{2}) :$

$$15\sqrt{6} : (3\sqrt{2}) = \frac{15}{3} \sqrt{\frac{6}{2}} = 5\sqrt{3}.$$

Exercițiul 5, pagina 23

c) $\sqrt{\frac{2}{15}} \cdot \sqrt{\frac{45}{8}} :$

$$\sqrt{\frac{2}{15}} \cdot \sqrt{\frac{45}{8}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 45}{15 \cdot 8}} = \sqrt{\frac{90}{120}}.$$

Efectuăm simplificări și obținem:

$$\sqrt{\frac{9}{12}} = \sqrt{\frac{3}{4}}.$$

Exercițiul 6, pagina 24

c) $\sqrt{\frac{6}{35}} : \sqrt{\frac{18}{70}} :$

$$\sqrt{\frac{6}{35}} : \sqrt{\frac{18}{70}} = \sqrt{\frac{6}{35} : \frac{18}{70}} = \sqrt{\frac{6}{35} \cdot \frac{70}{18}} = \sqrt{\frac{420}{630}}.$$

Efectuăm simplificări și obținem:

$$\sqrt{\frac{42}{63}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 7}{9 \cdot 9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

7.3. Puteri cu exponent număr întreg

Exercițiul 1, pagina 25

a) $(\sqrt{3})^4 :$

$$(\sqrt{3})^4 = (\sqrt{3})^2 \cdot (\sqrt{3})^2 = 3 \cdot 3 = 9.$$

b) $(-\sqrt{3})^3 :$

$$(-\sqrt{3})^3 = (-\sqrt{3})^2 \cdot (-\sqrt{3}) = 3 \cdot (-\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}.$$

c) $(2\sqrt{3})^2 :$

$$(2\sqrt{3})^2 = 2^2 \cdot (\sqrt{3})^2 = 4 \cdot 3 = 12.$$

d) $(\sqrt{2})^{-2}$:

$$(\sqrt{2})^{-2} = \frac{1}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{4}.$$

Exercițiul 2, pagina 25

b) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^3$:

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{(-\sqrt{2})^2}{3^2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{4}{9} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{-4\sqrt{2}}{27}.$$

c) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-3}$:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{3^3}{(\sqrt{3})^3} = \frac{27}{(\sqrt{3})^2 \cdot (\sqrt{3})} = \frac{27}{3 \cdot (\sqrt{3})}.$$

8. Raționalizarea numitorului de forma $a\sqrt{b}$, $b \geq 0$

Exercițiul 1, pagina 26

a) $\frac{1}{\sqrt{6}}$:

Vom amplifica fracția cu numărul de la numitor. Obținem fracția echivalentă:

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6} \cdot 1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}^2} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

$\frac{10}{\sqrt{5}}$:

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} \cdot 10}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{\sqrt{5}^2} = \frac{10\sqrt{5}}{5}.$$

Simplificăm acum fracția:

$$\frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}.$$

c) $\frac{-9}{2\sqrt{3}}$:

Vom amplifica fracția cu radicalul de la numitor. Obținem fracția:

$$\frac{\sqrt{3} - 9}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \cdot (-9)}{\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{-9\sqrt{3}}{2(\sqrt{3})^2} = \frac{-9\sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{3}^2} = \frac{-9\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{-9\sqrt{3}}{6}.$$

Simplificăm acum fracția:

$$\frac{-9\sqrt{3}}{6} \stackrel{(3)}{=} \frac{-3\sqrt{3}}{2}.$$

9. Ordinea efectuării operațiilor

Exercițiul 1, pagina 27

b) $\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \right)$

Pasul I: Raționalizăm numitorul fracției și efectuăm adunarea din paranteza rotundă:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \right) &= \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} + \sqrt{2} \right) = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + {}^2)\sqrt{2} \right) = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{2} \right) = \\ &= \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} \right). \end{aligned}$$

Pasul II: Efectuăm înmulțirea, efectuăm simplificările și obținem:

$$\sqrt{2} \cdot \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{4}}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3.$$

Exercițiul 2, pagina 27

a) $\sqrt{32} - 2\sqrt{8} + 5\sqrt{2} - 2(\sqrt{2} + \sqrt{8})$

Pasul I: Scoatem factorii de sub radicali:

$$\begin{aligned} \sqrt{32} - 2\sqrt{8} + 5\sqrt{2} - 2(\sqrt{2} + \sqrt{8}) &= \\ &= \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2} - 2\sqrt{2^2 \cdot 2} + 5\sqrt{2} - 2(\sqrt{2} + \sqrt{2^2 \cdot 2}) = \\ &= 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 2(\sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{2}) = \\ &= 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 2(\sqrt{2} + 2\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Pasul II: Efectuăm calculele din paranteza rotundă:

$$4\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 2 \cdot 3\sqrt{2}.$$

Pasul III: Efectuăm scăderile și adunările:

$$4\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 5\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = -1\sqrt{2}.$$

10. Media aritmetică ponderată a n numere reale, $n \geq 2$

Exercițiul 7, pagina 30

Prețul unui kilogram de amestec este media ponderată a bomboanelor ce îl compun, ponderea fiind reprezentată de cantitatea adăugată din fiecare tip de bomboane.

$$m_p = \frac{22,5 \text{ lei/kg} \cdot 10 \text{ kg} + 21,5 \text{ lei/kg} \cdot 12 \text{ kg} + 25 \text{ lei/kg} \cdot 8 \text{ kg}}{10 \text{ kg} + 12 \text{ kg} + 8 \text{ kg}}$$

$$m_p = \frac{225 \text{ lei} + 258 \text{ lei} + 200 \text{ lei}}{30 \text{ kg}}$$

$$m_p = \frac{683 \text{ lei}}{30 \text{ kg}} = 22,7(6) \text{ lei/kg de amestec}$$

Exercițiul 10, pagina 30

Pentru aflarea concentrației soluției finale vom calcula media ponderată a celor trei soluții de concentrație diferită, ponderea fiind cantitatea de soluție adăugată la amestec.

$$m_p = \frac{\frac{32}{100} \cdot 10 \text{ kg} + \frac{38}{100} \cdot 8 \text{ kg} + \frac{42}{100} \cdot 6 \text{ kg}}{10 \text{ kg} + 8 \text{ kg} + 6 \text{ kg}}$$

$$m_p = \frac{\frac{876}{100}}{24 \text{ lei}} = \frac{876}{100} \cdot \frac{1}{24} = \frac{36,5}{100}$$

Concentrația amestecului celor trei soluții este de 36,5% .

11. Media geometrică a două numere reale pozitive

Exercițiul 1, pagina 31

a) 12 și 3 :

$$m_g(12, 3) = \sqrt{12 \cdot 3} = \sqrt{36} = 6.$$

c) $\frac{2}{45}$ și $\frac{5}{8}$:

$$m_g\left(\frac{2}{45}, \frac{5}{8}\right) = \sqrt{\frac{2}{45} \cdot \frac{5}{8}} = \sqrt{\frac{10}{360}} = \sqrt{\frac{1}{36}}.$$

Conform proprietăților radicalului, acesta se distribuie la numitor și la numărător. Obținem:

$$\sqrt{\frac{1}{36}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{36}} = \frac{1}{\sqrt{36}}.$$

Raționalizăm numitorul:

$$\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{36}} \cdot \frac{1}{\sqrt{36}} = \frac{\sqrt{36}}{(\sqrt{36})^2} = \frac{\sqrt{36}}{36}.$$

12. Ecuații de forma $x^2 = a, a \in \mathbb{R}$

Ținem cont de faptul că rădăcina pătrată a unui număr real este o valoare în modul, adică $\sqrt{(x^2)} = |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Calculând atât $x \cdot x$, cât și $(-x) \cdot (-x)$, obținem același rezultat, x^2 , $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exercițiul 1, pagina 32

a) $x^2 = 25$:

$x^2 = 25$ are soluțiile $-\sqrt{25}$ și $+\sqrt{25}$, adică -5 și $+5$.

b) $3x^2 = 27$:

$3x^2 = 27$ este echivalentă cu $x^2 = \frac{27}{3}$, adică $x^2 = 9$. Această ecuație are soluțiile $-\sqrt{9}$ și $+\sqrt{9}$, adică -3 și $+3$.

c) $2x^2 - 3 = 15$:

$2x^2 - 3 = 15$ este echivalentă cu $2x^2 = 15 + 3$, adică $2x^2 = 18$. De aici obținem $x^2 = \frac{18}{2}$, deci $x^2 = 9$. Soluțiile sunt -3 și $+3$.

d) $x^2 + 5 = 4$:

$x^2 + 5 = 4$ este echivalentă cu $x^2 = 4 - 5$, adică $x^2 = -1$. Cum $-1 \notin \mathbb{R}_+$, rezultă că nu avem soluții.

Capitolul II. Ecuații și sisteme de ecuații liniare

1. Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități

Exercițiul 1, pagina 34

a) $2x^2 - 6x + 3$:

Din ipoteză știm că $2x^2 - 6x + 5 = 11$. Pentru a găsi relația căutată scădem 2 din această egalitate. Obținem:

$$2x^2 - 6x + 5 - 2 = 11 - 2,$$

Echivalent cu:

$$2x^2 - 6x - 3 = 9.$$

e) $x^2 - 3x$:

Scădem 5 din relația inițială. Obținem:

$$2x^2 - 6x + 5 - 5 = 11 - 5,$$

De unde:

$$2x^2 - 6x = 6.$$

Împărțim relația obținută la 2 și obținem:

$$\frac{2x^2 - 6x}{2} = \frac{6}{2},$$

Adică:

$$\frac{2(x^2 - 3x)}{2} = 3,$$

De unde:

$$x^2 - 3x = 3.$$

Exercițiul 2, pagina 35

a) $x + y - z$

Pentru a obține valoarea acestei expresii trebuie să ne folosim de cele două relații din ipoteză. Astfel, dacă scădem cele două relații obținem:

$$x + 3y - (2y + z) = 11 - 5.$$

Desfacem paranteza rotundă și obținem:

$$x + 3y - 2y - z = 6,$$

adică:

$$x + y - z = 6.$$

2. Ecuații de forma $ax + b = 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Mulțimea soluțiilor unei ecuații. Ecuații echivalente

Exercițiul 4, pagina 36

b) $2x - 4 = 0$.

Pasul I: Adunăm 4 întregii ecuații:

$$2x - 4 + 4 = 0 + 4, \text{ echivalent cu } 2x = 4.$$

Pasul II: Împărțim la 2 întreaga ecuație:

$$\frac{2}{2}x = \frac{4}{2}, \text{ echivalent cu } x = 2.$$

Exercițiul 7, pagina 36

c) $2x - \sqrt{8} = 8$.

Pasul I: Scoatem factorii de sub radicali:

$$2x - \sqrt{2^2 \cdot 2} = 8,$$

Adică:

$$2x - 2\sqrt{2} = 8.$$

Pasul II: Adunăm $2\sqrt{2}$ întregii ecuații:

$$2x - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 8 + 2\sqrt{2}, \text{ echivalent cu } 2x = 8 + 2\sqrt{2}.$$

Pasul III: Împărțim la 2 întreaga ecuație:

$$\frac{2}{2} x = \frac{8+2\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{echivalent cu } x = \frac{8+2\sqrt{2}}{2}.$$

Pasul IV: Dăm factor comun 2 la numărător.

$$x = \frac{2(4+\sqrt{2})}{2},$$

iar prin simplificare rezultă că $x = 4 + \sqrt{2}$.

Exercițiul 11, pagina 37

a) $3x + m = 5$.

Cum 2 este soluția ecuației, înseamnă că dacă îl înlocuim pe x cu 2, obținem egalitate între membrii ecuației. Astfel:

$$3x + m = 5 \text{ devine } 3 \cdot 2 + m = 5,$$

$$\text{de unde rezultă că } 6 + m = 5,$$

deci:

$$m = 5 - 6 = -1.$$

Exercițiul 16, pagina 38

$$\text{f) } \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 5$$

Sub radical avem pătratul binomului $x - 2$. Rescriem expresia:

$$\sqrt{(x - 2)^2} = 5$$

Extragem radical din pătratul obținut. Ținem cont că radicalul unui număr real este întotdeauna pozitiv:

$$|x - 2| = 5$$

Avem două cazuri:

Cazul I:

$$x - 2 = 5, \text{ deci } x = 7.$$

Cazul II:

$$x - 2 = -5, \text{ deci } x = -3.$$

Soluția este: $x \in \{-3, 3\}$.

3. Sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute. Rezolvare prin metoda substituției și/sau prin metoda reducerii

Exercițiul 1, pagina 40

a) Înlocuim în ambele ecuații necunoscutele x și y cu valorile precizate.

Încercăm cu $x = -2, y = 1$. Astfel, obținem:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 + 1 = 1 \\ 2 \cdot (-2) - 1 = -4 \end{cases}, \text{ adică:}$$
$$\begin{cases} -1 = 1 \\ -5 = -4 \end{cases}, \text{ fals.}$$

Încercăm și $x = 1, y = -2$. Obținem:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2 = 1 \\ 2 \cdot 1 - (-2) = -4 \end{cases}, \text{ adică:}$$
$$\begin{cases} -1 = 1 \\ 4 = -4 \end{cases}, \text{ fals.}$$

Am aflat că perechea de valori $(-2, 1)$ nu este soluție pentru sistemul dat.

Exercițiul 3, pagina 40

Rezolvarea prin metoda substituției presupune găsirea unei forme de a scrie unul dintre termeni în funcție de celălalt termen în una dintre ecuații, apoi de a înlocui în cealaltă ecuație respectivul termen cu formula găsită, obținând astfel o ecuație cu o singură necunoscută.

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + y = -5 \end{cases}$$

Din prima ecuație, avem că $x = 2 - y$. Înlocuim în a doua ecuație necunoscuta x cu " $2 - y$ ". Obținem:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (2 - y) + y &= -5, \text{ adică:} \\ 4 - y &= -5, \text{ de unde:} \\ y &= 9. \end{aligned}$$

Putem afla acum și valoarea lui x , fie înlocuind în una dintre ecuațiile sistemului pe y cu 9, fie folosind direct expresia de la care pornisem, și anume $x = 2 - y$.

$$\begin{cases} x = 2 - y \\ y = 9 \end{cases} \Rightarrow x = 2 - 9, \text{ deci}$$

$$x = -7.$$

$$b) \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$$

Din a doua ecuație, obținem că $3y = 6 - x$. Înlocuim în prima ecuație pe $3y$ cu $6 - x$ și obținem:

$$2x + 6 - x = 5, \text{ adică:}$$

$$x + 6 = 5, \text{ de unde:}$$

$$x = -1.$$

Putem afla acum și valoarea lui x , fie înlocuind în una dintre ecuațiile sistemului pe x cu -1 , fie folosind direct expresia de la care pornisem, și anume $6 - x = 3y$.

$$\begin{cases} 6 - x = 3y \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow 3y = 6 + 1, \text{ deci} \\ y = \frac{7}{3}.$$

Exercițiul 4, pagina 40

Rezolvarea sistemului prin metoda reducerii presupune înmulțirea uneia sau a ambelor ecuații din sistem cu câte un număr ales în așa fel încât, prin adunarea sau scăderea membru cu membru a ecuațiilor obținute să se obțină o ecuație cu o singură necunoscută.

$$a) \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 7 \end{cases}$$

Nu este necesară înmulțirea ecuațiilor cu nici un număr, deoarece observăm că, prin adunarea celor două ecuații membru cu membru, obținem:

$$x + x + y - y = 3 + 7, \text{ adică}$$

$$2x = 10, \text{ de unde}$$

$$x = 5.$$

Înlocuind pe x cu 5 în una dintre ecuațiile sistemului, obținem că:

$$5 + y = 3, \text{ deci}$$

$$y = -2.$$

$$b) \begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ x - 3y = 3 \end{cases}$$

Deoarece adunarea în forma actuală a celor două ecuații nu ar duce la rezultatul dorit (o ecuație cu o singură necunoscută), trebuie să înmulțim una dintre ecuații cu un număr. Observăm că, înmulțind toți termenii celei de-a doua ecuații cu numărul întreg -2 , iar apoi adunând cele două ecuații, obținem:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ -2x + 6y = -6 \end{cases} \xrightarrow{(+)} 0 + 11y = 2, \text{ deci } y = \frac{2}{11}.$$

Înlocuim y cu $\frac{2}{11}$ în una dintre ecuațiile sistemului, și obținem:

$$\begin{aligned} x - 3 \cdot \frac{2}{11} &= 3, \text{ adică} \\ x &= 3 + \frac{6}{11}, \text{ deci} \\ x &= \frac{39}{11}. \end{aligned}$$

Exercițiul 5, pagina 40

$$c) \begin{cases} x - y\sqrt{2} = 3 \\ -3x + 2\sqrt{2}y = -7 \end{cases}$$

Folosim metoda substituției pentru a rezolva sistemul:

Pasul I: Îl scriem pe x în funcție de y în prima ecuație. Obținem:

$$x - y\sqrt{2} = 3 \Leftrightarrow x = 3 + y\sqrt{2}.$$

Pasul II: Înlocuim în a doua ecuație x cu $3 + y\sqrt{2}$ și aflăm valoarea lui y :

$$-3 \cdot (3 + y\sqrt{2}) + 2y\sqrt{2} = -7$$

Desfacem parantezele:

$$-9 - 3y\sqrt{2} + 2y\sqrt{2} = -7$$

Calculăm:

$$-9 - y\sqrt{2} = -7$$

Obținem:

$$y = -\frac{2}{\sqrt{2}}$$

Raționalizăm numitorul:

$$y = -\sqrt{2}.$$

Pasul III: Acum îl putem calcula pe x în oricare dintre cele două ecuații, înlocuind y cu valoarea sa, $-\sqrt{2}$. Alegem să înlocuim în prima ecuație:

$$x - (-\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2} = 3$$

Efectuăm înmulțirea, ținând cont de semnele factorilor:

$$x - (-2) = 3$$

Adică:

$$x + 2 = 3$$

Obținem

$$x = 1.$$

Soluția sistemului este:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -\sqrt{2} \end{cases}.$$

Exercițiul 8, pagina 41

$$\text{b) } \begin{cases} x - 5(x + 2y) = -6 \\ 3x - y = -5 + y \end{cases}$$

Ne propunem să rezolvăm sistemul prin metoda reducerii. Desfacem parantezele, mutăm toate necunoscutele în partea stângă a ecuațiilor:

$$\begin{cases} x - 5x - 10y = -6 \\ 3x - y - y = -5 \end{cases},$$

Deci:

$$\begin{cases} -4x - 10y = -6 \\ 3x - 2y = -5 \end{cases}$$

Pasul I: Înmulțim toți termenii din a doua ecuație cu -5 .

$$\begin{cases} -4x - 10y = -6 \\ -15x + 10y = 25 \end{cases}$$

Pasul II: Adunăm relațiile obținute:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -4x - 10y = -6 \\ -15x + 10y = 25 \end{cases} \\ \hline -19x = 19 \end{array} (+)$$

Efectuăm împărțirea, obținem $x = -1$.

Pasul III: Îl înlocuim pe x cu valoarea sa într-una din cele două ecuații și aflăm valoarea lui y . Alegem a doua ecuație:

$$3 \cdot (-1) - 2y = -5$$

Efectuăm calculele:

$$\begin{aligned} -3 - 2y &= -5 \\ -2y &= -2 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Soluția sistemului este:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

4. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau a sistemelor de ecuații liniare

Exercițiul 4, pagina 42

Notăm cu x unul dintre numerele pare consecutive din sumă. Scriem celelalte numere din sumă în funcție de x . Vecinii pari ai lui x sunt $x - 2$ și $x + 2$. Există mai multe variante corecte de a alege această scriere, optăm pentru $x - 4$, $x - 2$, x și $x + 2$.

Scriem suma:

$$(x - 4) + (x - 2) + x + (x + 2) = 1220$$

Efectuăm calculele:

$$4x - 4 = 1220$$

Adică:

$$4x = 1224$$

Împărțim cu 4 ambii termeni ai egalității, obținem că:

$$x = 306$$

Calculăm ceilalți 3 termeni ai sumei, în funcție de x :

$$x - 4 = 302$$

$$x - 2 = 304$$

$$x + 2 = 308$$

Cele 4 numere sunt: $\{302, 304, 306, 308\}$.

Exercițiul 10, pagina 43

Notăm procentul căutat cu litera p . Obținem ecuația:

$$1000 - \frac{p}{100} \cdot 1000 = 850.$$

Pasul I: Efectuăm simplificarea:

$$1000 - \frac{p}{100} \cdot 1000 = 850 \text{ devine } 1000 - p \cdot 10 = 850.$$

Pasul II: Scădem 1000 întregii ecuații. Obținem:

$$1000 - p \cdot 10 - 1000 = 850 - 1000, \text{adică } -p \cdot 10 = -150.$$

Pasul III: Împărțim la -10 întreaga ecuație. Obținem:

$$\frac{-10p}{-10} = \frac{-150}{-10}, \text{de unde rezultă că } p = 15.$$

Exercițiul 16, pagina 43

Notăm cele două numere cu a și b . Avem raportul:

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$$

Observăm că raportul este subunitar, adică numărătorul este mai mic decât numitorul. Atunci, cel mai mic dintre cele două numere este a , iar cel mai mare este b . A doua proprietate din ipoteză devine:

$$3a + b = 220$$

Folosim proporții derivate pentru a calcula cele două numere. Vrem să obținem la numărător $3a + b$. Înmulțim ambele fracții cu 3:

$$\frac{3a}{b} = \frac{6}{5}$$

Acum adunăm numitorii la numărători:

$$\frac{3a + b}{b} = \frac{6 + 5}{5}$$

Adică:

$$\frac{3a + b}{b} = \frac{11}{5}$$

Știm că $3a + b = 220$. Obținem:

$$\frac{220}{b} = \frac{6 + 5}{5}$$

Produsul mezilor este egal cu produsul extremilor. Putem afla valoarea lui b :

$$11b = 1100$$

Deci:

$$b = 100$$

Înlocuim b cu 100 în raportul inițial pentru a afla valoarea lui a :

$$\frac{a}{100} = \frac{2}{5}$$

Produsul mezilor este egal produsul extremilor:

$$5a = 200$$

Deci:

$$a = 40$$

Exercițiul 25, pagina 44

Notăm numărul din ipoteză cu x . Avem că:

$$\frac{x \cdot \sqrt{x}}{\frac{x}{4}} = 40$$

Scriem fracția ca numărător împărțit la numitor:

$$(x \cdot \sqrt{x}) : \frac{x}{4} = 40$$

Adică:

$$(x \cdot \sqrt{x}) \cdot \frac{4}{x} = 40$$

Obținem:

$$4\sqrt{x} = 40, \text{ deci } \sqrt{x} = 10.$$

Ridicăm la pătrat și obținem rezultatul final $x = 100$.

Verificăm răspunsul obținut:

$$(100 \cdot 10) : 25 = 1000 : 25 = 40 \text{ corect.}$$

Exercițiul 40, pagina 45

Pentru ușurință în scriere, notăm cu x numărul de elevi și cu y numărul de bănci. În ipoteză putem identifica două ecuații. Dacă elevii dintr-o clasă s-ar așeza câte 3 într-o bancă, ar rămâne 6 bănci libere și o bancă în care ar sta 2 elevi. Adică dacă scădem 2 din numărul total al elevilor, obținem un număr de 7 ori mai mare decât numărul băncilor.

$$(x - 2) : 3 = y - 7$$

Dacă se așază câte 2 elevi într-o bancă, atunci ar rămâne o bancă liberă. Înțelegem de aici că numărul de bănci este cu 1 mai mare decât numărul de elevi.

$$x : 2 = y - 1$$

Am obținut astfel un sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute:

$$\begin{cases} x - 2 = 3y - 21 \\ x = 2y - 2 \end{cases}$$

Rezolvăm sistemul prin metoda substituției. Înlocuim în prima ecuație pe x cu $2y - 2$ și obținem ecuația cu o singură necunoscută:

$$2y - 2 - 2 = 3y - 21$$

Continuăm de aici calculul:

$$2y - 4 = 3y - 21$$

$$3y - 2y = 21 - 4$$

$$y = 17$$

Am aflat că în sala de clasă sunt 19 bănci.

Putem acum afla și numărul de elevi:

$$x = 217 - 2$$

$$x = 34 - 2$$

$$x = 32$$

Clasa are 37 de elevi.

Capitolul III. Elemente de organizare a datelor

1. Produsul cartezian a două mulțimi nevide. Sistem de axe ortogonale în plan. Reprezentarea într-un sistem de axe ortogonale a unor perechi de numere reale. Reprezentarea punctelor într-un sistem de axe ortogonale. Distanța dintre două puncte în plan

Exercițiul 1, pagina 50

a) $A \times B$.

Produsul cartezian $A \times B$ este o mulțime de perechi de numere (x, y) cu proprietatea că $x \in A$ și $y \in B$. Formăm mulțimea alegând convenabil elemente astfel încât această condiție să fie respectată. Obținem:

$$A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}.$$

b) Numărul elementelor (cardinalul) mulțimii $A \times B$.

Numărul de elemente al unei mulțimi se numește cardinalul mulțimii. Cardinalul mulțimii A este 3, deoarece A are 3 elemente, iar cardinalul mulțimii B este 2. $A \times B$ va avea $3 \cdot 2$ elemente, deci cardinalul mulțimii $A \times B$ va fi egal cu 6.

Exercițiul 13, pagina 52

b) Lungimea segmentului $[AB]$.

Aplicăm formula de calcul a lungimii unui segment cu ajutorul coordonatelor din reperul cartezian ale capetelor acestuia.

$$\begin{aligned} [AB] &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ \text{Rezultă că: } [AB] &= \sqrt{(1 - 1)^2 + (3 - 2)^2} \\ \text{Echivalent cu: } [AB] &= \sqrt{0^2 + 1^2} \\ \text{Echivalent cu: } [AB] &= \sqrt{0 + 1} \\ \text{Obținem că: } [AB] &= 1 \end{aligned}$$

Exercițiul 16, pagina 52

a) A este mijlocul lui $[BC]$.

Putem afla coordonatele lui A , deoarece acesta este mijlocul segmentului $[BC]$. Coordonatele sale sunt $A(x_a, y_a)$, unde:

$$1. x_a = \frac{x_b + x_c}{2}, \text{ adică: } -4 = \frac{x + 6}{2}.$$

$$\text{Obținem: } -4 \cdot 2 = x + 6$$

$$\text{Adică: } -8 = x + 6$$

$$\text{Deci: } x = -8 - 6 = -14.$$

$$2. y_a = \frac{y_b + y_c}{2}, \text{ adică } -5 = \frac{-2 + y}{2}.$$

$$\text{Obținem: } -5 \cdot 2 = -2 + y$$

$$\text{Adică: } -10 = -2 + y$$

$$\text{Deci: } y = -10 + 2 = -8.$$

2. Reprezentarea și interpretarea unor dependențe funcționale prin tabele, diagrame și grafice: poligonul frecvențelor

Exercițiul 1, pagina 55

a) Pentru a afla numărul total al elevilor trebuie să adunăm numerele de pe liniile tabelului corespunzătoare fiecărei clase.

Numărul total de elevi este:

$$1 + 3 + 3 + 2 + 7 + 5 + 3 + 6 + 0 + 2 + 5 + 6 + 3 + 7 + 2 + 5 + 1 + 1 + 3 + 6 + 2 + 4 + 5 + 5 + 0 + 3 + 3 + 1 + 5 + 7 + 5 + 4 = 115.$$

b) Trebuie să aflăm media notelor fiecărei clase. Observăm că media notelor este o medie ponderată, ponderile fiind numărul de elevi ce a obținut fiecare notă în parte. Calculăm media astfel:

$$\text{Clasa a VII-a A: Nr. de elevi} = 1 + 3 + 3 + 2 + 7 + 5 + 3 + 6 = 30.$$

$$\text{Media} = \frac{1 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 7 \cdot 7 + 5 \cdot 8 + 3 \cdot 9 + 6 \cdot 10}{30} = \frac{218}{30} = 7,2(6).$$

$$\text{Clasa a VII-a B: Nr. de elevi} = 0 + 2 + 5 + 6 + 3 + 7 + 2 + 5 = 30.$$

$$\text{Media} = \frac{0 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + 7 \cdot 8 + 2 \cdot 9 + 5 \cdot 10}{30} = \frac{214}{30} = 7,1(3).$$

Clasa a VII-a C: Nr. de elevi = $1 + 1 + 3 + 6 + 2 + 4 + 5 + 5 = 27$.

$$\text{Media} = \frac{1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 6 \cdot 6 + 2 \cdot 7 + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 9 + 5 \cdot 10}{27} = \frac{199}{27} = 7, (370).$$

Clasa a VII-a D: Nr. de elevi = $0 + 3 + 3 + 1 + 5 + 7 + 5 + 4 = 28$.

$$\text{Media} = \frac{0 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 6 + 5 \cdot 7 + 7 \cdot 8 + 5 \cdot 9 + 4 \cdot 10}{28} = \frac{209}{28} = 7,46(428571).$$

Observăm că media cea mai mare a obținut-o clasa a VII-a D.

c) Trebuie să aflăm numărul elevilor care au obținut note de 8, 9 și 10. Astfel, trebuie să adunăm numerele din coloanele care reprezintă notele 8, 9 și 10. Obținem:

$$\text{Nr. elevi cu nota 8: } 5 + 7 + 4 + 7 = 23.$$

$$\text{Nr. elevi cu nota 9: } 3 + 2 + 5 + 5 = 15.$$

$$\text{Nr. elevi cu nota 10: } 6 + 5 + 5 + 4 = 20.$$

$$\text{Total: } 23 + 15 + 20 = 58.$$

$$\text{d) Obținem ecuația } p = \frac{100 \cdot 23}{115} = 20.$$

Exercițiul 9, pagina 58

b) Pentru fiecare element x din A , verificăm dacă există elementul $2x$ din B . Astfel:

- $x = 0, 2x = 2 \cdot 0 = 0 \in B$. Obținem perechea $(0; 0)$.
- $x = 1, 2x = 2 \cdot 1 = 2 \in B$. Obținem perechea $(1; 2)$.

$$\text{Așadar, } P = \{(0; 0), (1; 2)\}.$$

Exercițiul 14, pagina 60

$$\text{a) } y = x + 3.$$

Pentru fiecare element x din mulțimea A , elementul corespunzător y din mulțimea B este $x + 3$. Elementele mulțimii B se obțin adunând 3 la fiecare element al mulțimii A . Astfel:

$$B = \{-3 + 3, -1 + 3, 0 + 3, 1 + 3, 2 + 3, 3 + 3\}. \text{ Obținem că:}$$

$$B = \{0, 2, 3, 4, 5, 6\}. \text{ Rezultă: } \text{card}(B) = 6.$$

GEOMETRIE

Capitolul I. Patrulaterul

1. Patrulaterul convex. Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex.

Exercițiul 3, pagina 66

a) Știm că suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este de 360° . Astfel, pentru a afla cât măsoară unghiul D , scădem din 360° mărimile unghiurilor cunoscute. Obținem ecuația:

$$m(\widehat{D}) = 360^\circ - m(\widehat{E}) - m(\widehat{F}) - m(\widehat{G}), \text{ adică:}$$

$$m(\widehat{D}) = 360^\circ - 119^\circ - 65^\circ - 87^\circ$$

$$m(\widehat{D}) = 241^\circ - 65^\circ - 87^\circ$$

$$m(\widehat{D}) = 176^\circ - 87^\circ$$

$$m(\widehat{D}) = 89^\circ.$$

2. Paralelogramul

Exercițiul 4, pagina 69

a) $AB = 3 \text{ cm}$ și perimetrul este de 20 cm .

Din definiția paralelogramului știm că $AB = CD$, deoarece AB și CD sunt laturi opuse, deci congruente. Perimetrul paralelogramului este egal cu:

$$P = AB + BC + CD + DA.$$

Cum $AB = CD$, obținem:

$$P = 3 \text{ cm} + 3 \text{ cm} + BC + DA.$$

Tot din definiția paralelogramului știm că $BC = DA$, deoarece sunt laturi opuse și congruente. Atunci:

$$P = 6 \text{ cm} + DA + DA$$

Adică: $P = 6 \text{ cm} + 2DA$

Deci: $20 \text{ cm} = 6 \text{ cm} + 2DA.$

Obținem că:

$$2DA = 20 \text{ cm} - 6 \text{ cm}$$

Adică: $2DA = 16 \text{ cm}$

Deci: $DA = \frac{16 \text{ cm}}{2} = 8 \text{ cm}.$

Exercițiul 15, pagina 69

a)

Observăm că:

$$m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{ADB}) + m(\widehat{CDB})$$

Adică:

$$m(\widehat{ADC}) = 60^\circ + 50^\circ = 110^\circ$$

Observăm și:

$$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ABD}) + m(\widehat{DBC})$$

Adică:

$$m(\widehat{ABC}) = 60^\circ + 50^\circ = 110^\circ$$

Cum $\widehat{ADC}$ și $\widehat{ABC}$ sunt unghiuri opuse și congruente, iar $ABCD$ este patrulater convex, rezultă că $ABCD$ este paralelogram.

3. Dreptunghiul

Exercițiul 6, pagina 72

Diagonala AC împarte dreptunghiul în două triunghiuri dreptunghice (ABC și ADC). Vom folosi triunghiul dreptunghic ABC pentru a calcula diagonala AC , care este ipotenuză în acest triunghi.

Din ipoteză știm că $m(\widehat{ACB}) = 60^\circ$ și $m(\widehat{ABC}) = 90^\circ$. Putem calcula măsura unghiului $\widehat{CAB}$. Avem relația:

$$m(\widehat{CAB}) = 180^\circ - m(\widehat{ABC}) - m(\widehat{ACB})$$

$$m(\widehat{CAB}) = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ$$

$$m(\widehat{CAB}) = 90^\circ - 60^\circ$$

$$m(\widehat{CAB}) = 30^\circ.$$

Cum unghiul $\widehat{CAB}$ măsoară 30° , putem aplica *Teorema unghiului de 30°* în triunghiul ABC . Obținem:

$$BC = \frac{AC}{2}, \text{ adică } 4,5 \text{ cm} = \frac{AC}{2}.$$

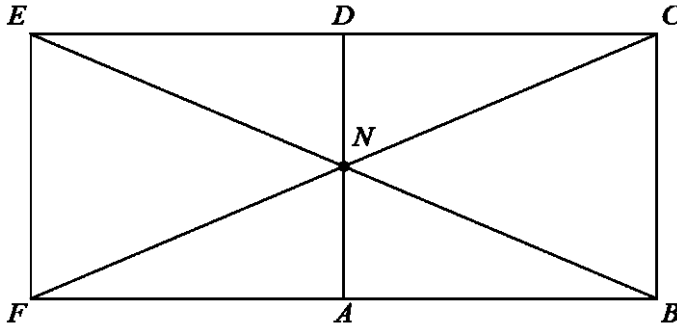
De aici rezultă că:

$$AC = 4,5 \cdot 2 \text{ cm}, \text{ deci } AC = 9 \text{ cm}.$$

Analog se arată și că $BD = 9 \text{ cm}$.

Rezultă că $AC + BD = 9\text{ cm} + 9\text{ cm} = 18\text{ cm}$.

Exercițiul 8, pagina 72



Cum N este mijlocul lui $[AD]$ rezultă că $DN \equiv NA$. Cum triunghiurile NDC și NAB sunt dreptunghice, iar:

$DC \equiv AB$ (din ipoteză) avem:

$$\left. \begin{array}{l} DN \equiv NA \\ DC \equiv AB \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{C.C.} \\ \end{array} \Rightarrow \triangle NDC \equiv \triangle NAB$$

În consecință, unghiurile $\widehat{DNC}$ și $\widehat{ANB}$ sunt congruente. Totodată avem și:

$$\widehat{FNA} \equiv \widehat{DNC} \text{ (opuse la vârf) și } \widehat{END} \equiv \widehat{ANB} \text{ (opuse la vârf)}.$$

Rezultă că:

$$\widehat{FNA} \equiv \widehat{END}. \text{ Atunci:}$$

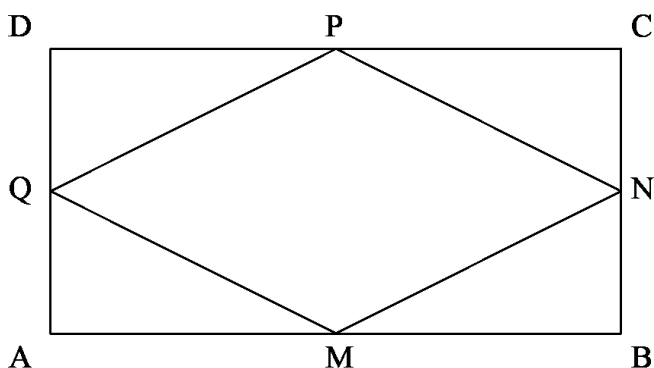
$$\left. \begin{array}{l} \widehat{FNA} \equiv \widehat{END} \\ DN \equiv NA \\ \triangle NAF \text{ și } \triangle NDE \text{ dreptunghice} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{C.U.} \\ \end{array} \Rightarrow \triangle NAF \equiv \triangle NDE$$

Obținem că $FB \equiv EC$ și, cum $m(\widehat{FBC}) = 90^\circ$, rezultă că $BCEF$ este dreptunghi.

4. Rombul

Exercițiul 7, pagina 74

Latura AB este congruentă cu latura DC (pentru că sunt laturi opuse ale unui dreptunghi). Cum M este mijlocul laturii AB , iar P este mijlocul laturii DC , ținând cont că $AB \equiv DC$, rezultă că $AM \equiv DP$.



Punctul Q este mijlocul laturii AD . Rezultă că $AQ \equiv QD$. Știind că $m(\sphericalangle QAM) = m(\sphericalangle QDP) = 90^\circ$, putem aplica criteriul de congruență *C.C. (catetă – catetă)* a triunghiurilor dreptunghice QAM și QDP . Obținem:

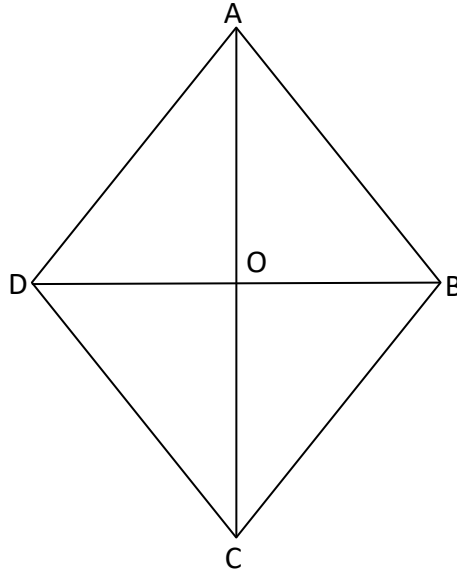
$$\left. \begin{array}{l} AM \equiv DP \\ AQ \equiv QD \\ m(\sphericalangle QAM) = m(\sphericalangle QDP) = 90^\circ \end{array} \right\} \xRightarrow{C.C.} \Delta QAM \equiv \Delta QDP \Rightarrow QM \equiv QP$$

În mod similar, se arată că:

$$\Delta MBN \equiv \Delta PCN \equiv \Delta QAM \equiv \Delta QDP.$$

Rezultă că $QM \equiv MN \equiv NP \equiv PQ$, deci $QMNP$ este romb.

Exercițiul 13, pagina 75



a) $m(\widehat{BAC}) = 32^\circ 30'$

$ABCD$ romb, așa că diagonalele sale sunt și bisectoare. Rezultă că măsura unghiului $\widehat{BAD}$ este:

$$m(\widehat{BAD}) = 32^\circ 30' \cdot 2 = 65^\circ$$

Unghiurile opuse ale rombului sunt congruente, deci măsura unghiului $\widehat{DCB}$ va fi $m(\widehat{BCD}) = 65^\circ$.

Din faptul că suma măsurilor unghiurilor unui patrulater este egală cu 360° , iar unghiurile opuse ale rombului sunt congruente, obținem că:

$$m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{ADC}) = 180^\circ$$

De aici:

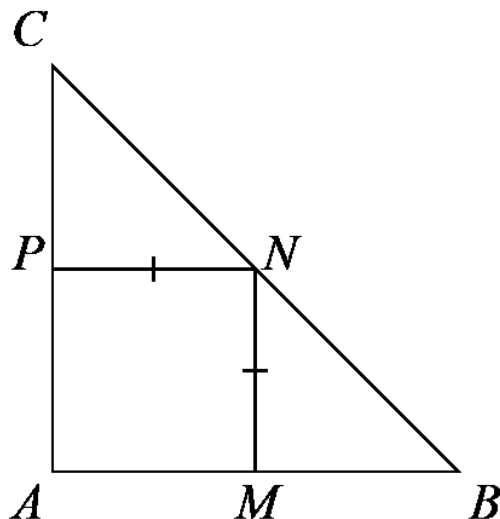
$$m(\widehat{ADC}) = 115^\circ$$

Unghiurile ADC și ABC sunt opuse la vârf, așa că:

$$m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{ABC}) = 115^\circ$$

5. Pătratul

Exercițiul 4, pagina 77



Cum P este mijlocul segmentului AC , iar N este mijlocul segmentului BC , rezultă că PN este linie mijlocie în triunghiul BAC și că:

$$PN = \frac{AB}{2}$$

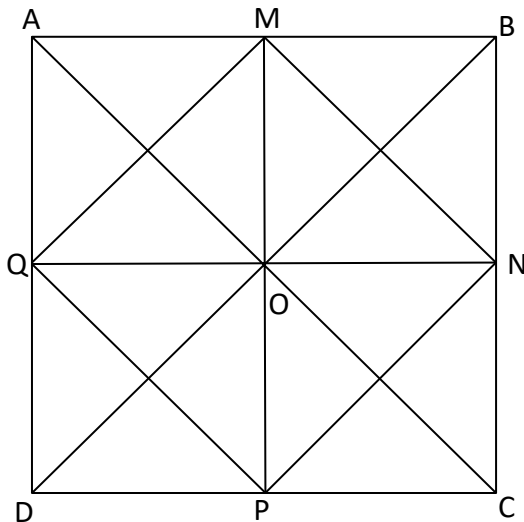
Cum M este mijlocul laturii AB , iar N este mijlocul laturii BC , rezultă că MN este linie mijlocie în triunghiul BAC și că:

$$MN = \frac{AC}{2}$$

Cum $AB \equiv AC$, rezultă că $PN \equiv MN$ și, mai mult, $PN \equiv MN \equiv AM \equiv PA$.

Cum unghiul $\hat{A}$ măsoară 90° , obținem că $MNPA$ este pătrat.

Exercițiul 9, pagina 77



Patrulaterul $ABCD$ este pătrat, cu laturile AB, BC, CD și AD de lungimi egale. Diagonalele sale, AC și BD , sunt congruente, intersecția lor fiind și mijlocul fiecărei diagonale. Atunci $AO = OB = OC = OD = 7\text{ cm}$.

M, N, P și Q sunt proiecțiile pe dreptele AB, BC, CD și AD ale punctului O . Atunci, deoarece triunghiurile $\triangle AOB, \triangle BOC, \triangle COD, \triangle DOA$ sunt isoscele, iar OM, ON, OP și OQ sunt perpendiculare pe bazele triunghiurilor corespunzătoare, avem că OM, ON, OP, OQ mediatoare ale segmentelor $[AB], [BC], [CD], [DA]$.

Pentru a putea calcula perimetrul, vrem să aflăm lungimea laturilor MN, NP, PQ și QM ale patrulaterului $MNPQ$. Vom lucra în triunghiurile $\triangle ABC, \triangle BCD, \triangle CDA, \triangle DAB$. Triunghiurile sunt congruente, conform criteriului *Latură – Latură – Latură*, deoarece au câte două laturi comune cu cele ale pătratului, cea de-a treia fiind diagonala pătratului.

În triunghiul $\triangle ABC$, $AB = BC$, deci $\triangle ABC$ isoscel. M este mijlocul segmentului $[AB]$, iar N este mijlocul segmentului $[BC]$. Atunci MN este linie mijlocie în triunghiul isoscel $\triangle ABC$ și are lungimea egală cu jumătate din AC . Am aflat că:

$$MN = \frac{AC}{2} = 7\text{ cm}$$

În triunghiul $\triangle BCD$, $BC = CD$, deci $\triangle BCD$ isoscel. N este mijlocul lui AC , iar P este mijlocul lui CD . Atunci NP este linie mijlocie în triunghiul $\triangle BCD$ și are lungimea egală cu jumătate din BD . Am aflat că:

$$NP = \frac{BD}{2} = 7\text{ cm}$$

În triunghiul $\triangle CDA$, $CD = DA$, deci $\triangle CDA$ isoscel. P este mijlocul segmentului $[CD]$, iar Q este mijlocul segmentului $[AD]$. Atunci PQ este linie mijlocie în triunghiul isoscel $\triangle CDA$ și are lungimea egală cu jumătate din AC . Am aflat că:

$$PQ = \frac{AC}{2} = 7\text{ cm}$$

În triunghiul $\triangle DAB$, $DA = AB$, deci $\triangle DAB$ isoscel. Q este mijlocul lui AD , iar M este mijlocul lui AB . Atunci QM este linie mijlocie în triunghiul $\triangle DAB$ și are lungimea egală cu jumătate din BD . Am aflat că:

$$QM = \frac{BD}{2} = 7\text{ cm}$$

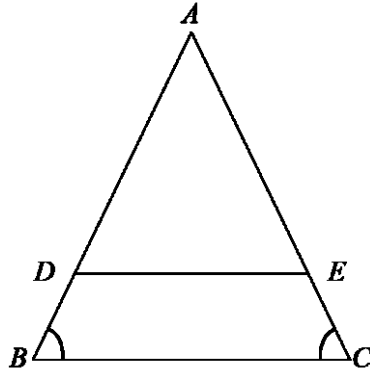
Am aflat lungimea laturilor patrulaterului $MNPQ$. Constatăm că acesta este un pătrat. Îi putem calcula perimetrul:

$$\begin{aligned} P_{MNPQ} &= MN + NP + PQ + QM \\ P_{MNPQ} &= 7\text{ cm} + 7\text{ cm} + 7\text{ cm} + 7\text{ cm} \\ P_{MNPQ} &= 28\text{ cm} \end{aligned}$$

6. Trapezul

Exercițiul 2, pagina 79

Construim un triunghi isoscel pe care îl notăm ABC ca în următoarea figură.



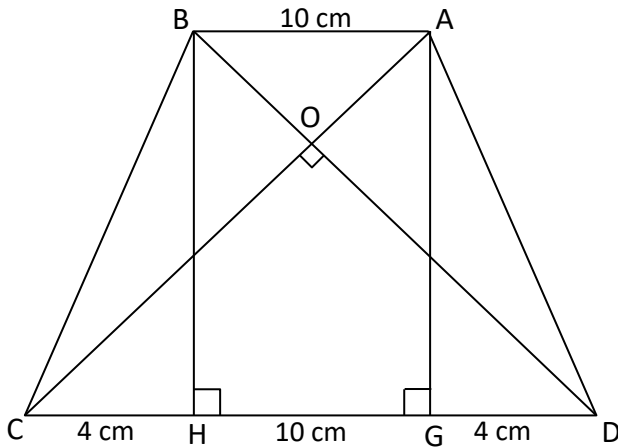
Fixăm un punct D pe segmentul AB , fără a-l suprapune cu punctul A sau punctul B .

Prin punctul D ducem o paralelă la dreapta BC . Notăm cu E punctul în care această dreaptă intersectează latura AC .

Cum triunghiul $\triangle ABC$ este isoscel, rezultă că unghiurile $\widehat{DBC}$ și $\widehat{ECB}$ sunt congruente.

Deoarece laturile DE și BC sunt paralele, iar $\widehat{DBC} \equiv \widehat{ECB}$, rezultă că patrulaterul $DBCE$ este trapez isoscel.

Exercițiul 13, pagina 80



Ducem înălțimile BH și AG în trapezul isoscel ABCD. În patrulaterul ABHG avem BH și AG perpendiculare pe GH, paralele și congruente. Rezultă că ABGH este dreptunghi. $AB \equiv GH$, deci $GH = 10$ cm.

Deoarece ABCD este un trapez dreptunghic isoscel cu diagonale perpendiculare BD și AC, avem că laturile CO și OD sunt congruente. De asemenea, BO este congruent cu AO. Acest lucru ne va ajuta în calculul lungimilor acestor laturi.

În triunghiul isoscel $\triangle COD$, măsura unghiului $\widehat{COD}$ este de 90° . Notăm cu x lungimea catetelor congruente CO și OD. Aplicăm *teorema lui Pitagora* și obținem:

$$CD^2 = CO^2 + OD^2$$

$$CD^2 = x^2 + x^2$$

$$CD^2 = 2x^2$$

$$x^2 = \frac{CD^2}{2}$$

$$x^2 = 162 \text{ cm}^2$$

$$x = 9\sqrt{2} \text{ cm}$$

În triunghiul isoscel $\triangle AOB$, măsura unghiului $\widehat{AOB}$ este de 90° . Notăm cu y lungimea catetelor congruente AO și OB. Aplicăm *teorema lui Pitagora* și obținem:

$$AB^2 = AO^2 + OB^2$$

$$\begin{aligned}
 AB^2 &= y^2 + y^2 \\
 AB^2 &= 2y^2 \\
 y^2 &= \frac{AB^2}{2} \\
 y^2 &= \sqrt{50} \text{ cm}^2 \\
 y^2 &= 5\sqrt{2} \text{ cm}
 \end{aligned}$$

Diagonala BD este compusă din laturile BO și OD. Lungimea diagonalei BD va fi egală cu:

$$\begin{aligned}
 9\sqrt{2} \text{ cm} + 5\sqrt{2} \text{ cm}, \text{ deci:} \\
 BD = 14\sqrt{2} \text{ cm}.
 \end{aligned}$$

Din *teorema lui Pitagora* aplicată în $\triangle ADG$ și $\triangle BCH$, cu BH și AG congruente și AD congruent cu BC, obținem că:

$$[CH] \equiv [GD].$$

$$CD = CH + HG + GD, \text{ deci:}$$

$$\begin{aligned}
 CH = GD &= \frac{(18-10)}{2} \text{ cm}, \text{ adică:} \\
 CH = GD &= 4 \text{ cm}.
 \end{aligned}$$

Atunci lungimea laturii $HD = HG + GD$ va fi de $10 + 4 = 14 \text{ cm}$.

Triunghiul $\triangle BHD$ este dreptunghic în unghiul $\widehat{DHB}$. Aplicăm *teorema lui Pitagora* pentru a calcula lungimea înălțimii BH.

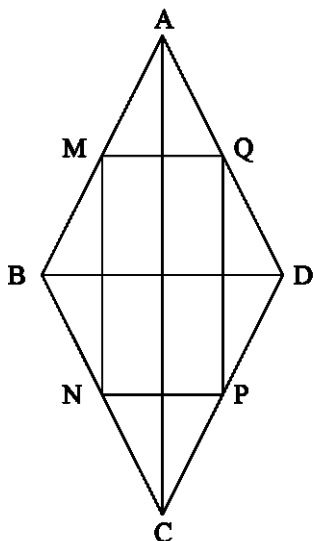
$$\begin{aligned}
 BD^2 &= BH^2 + HD^2 \\
 BH^2 &= BD^2 - HD^2 \\
 BH^2 &= 392 - 196 \text{ cm}^2 \\
 BH^2 &= 196 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

Obținem că:

$$BH = 14 \text{ cm}.$$

7. Perimetre și arii: paralelogram, paralelograme particulare, triunghi, trapez

Exercițiul 23, pagina 89



MQ este linie mijlocie în triunghiul ABD . Rezultă că $MQ = \frac{BD}{2}$, adică:

$$MQ = \frac{14 \text{ cm}}{2} = 7 \text{ cm}.$$

Analog, se obține și că $NP = 7 \text{ cm}$.

MN este linie mijlocie în triunghiul ABC . Rezultă că $MN = \frac{AC}{2}$, adică:

$$MN = \frac{20 \text{ cm}}{2} = 10 \text{ cm}.$$

Analog, se obține și că $QP = 10 \text{ cm}$.

Cum MQ este paralelă cu NP , iar MN este perpendiculară pe NP , rezultă că $MNPQ$ este dreptunghi. Astfel, aria lui $MNPQ$ este:

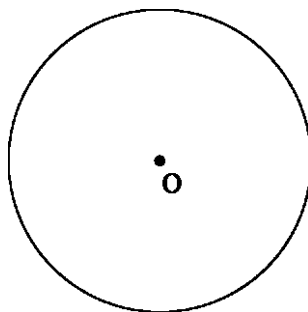
$$MN \cdot NP = 10 \text{ cm} \cdot 7 \text{ cm} = 70 \text{ cm}^2.$$

Capitolul II. Cercul

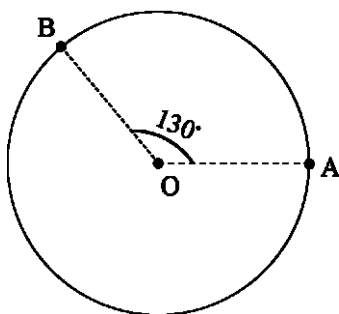
1. Unghi înscris în cerc. Coarde și arce în cerc, proprietăți.

Exercițiul 6, pagina 96

Deoarece raza cercului r nu este specificată, îi putem alege o mărime aleatorie. Desenăm un cerc de centru O și de rază r .

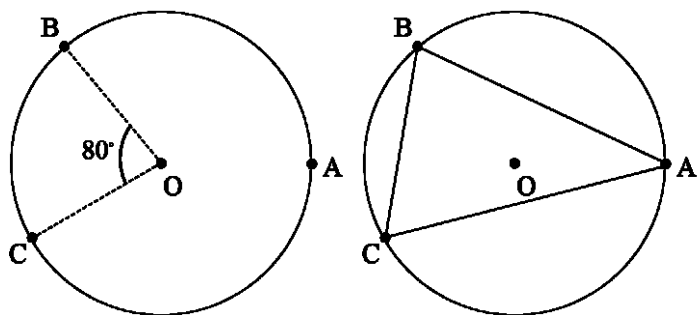


Plasăm punctul A oriunde pe cerc. Plasăm punctul B pe cerc astfel încât $m(\sphericalangle AOB) = 130^\circ$.



Plasăm apoi punctul C astfel încât $m(\sphericalangle BOC) = 80^\circ$. Cum nu este specificat nimic despre poziția punctului C , vom avea de tratat două cazuri posibile:

Cazul I: Punctele A, B, C se află în această ordine pe cerc.

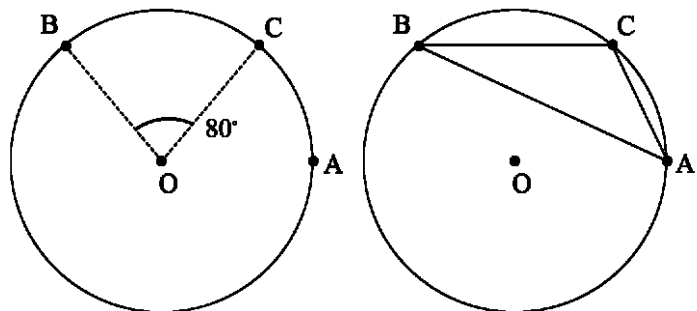


Rezultă că: $m(\sphericalangle BCA) = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ$; $m(\sphericalangle CAB) = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$.

Pentru a afla cât măsoară unghiul ABC , aflăm măsura coardei CA . Aceasta este egală cu diferența dintre 360° (măsura cercului) și suma celorlalte coarde. În acest caz, $360^\circ - (130^\circ + 80^\circ) = 360^\circ - 210^\circ = 150^\circ$. Astfel:

$$m(\sphericalangle ABC) = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ.$$

Cazul II: Punctele A, B, C se află pe cerc în ordinea A, C, B .



Rezultă că:

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle BAC) &= \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ \\ m(\sphericalangle BCA) &= \frac{360^\circ - 130^\circ}{2} = \frac{230^\circ}{2} = 115^\circ \\ m(\sphericalangle ABC) &= \frac{130^\circ - 80^\circ}{2} = \frac{50^\circ}{2} = 25^\circ \end{aligned}$$

Exercițiul 8, pagina 96

OM și ON sunt raze ale cercului și astfel sunt și congruente. Rezultă că triunghiul OMN este isoscel. Mai mult:

$m(\widehat{MON}) = 60^\circ$ și, cum $\widehat{OMN} \equiv \widehat{ONM}$, rezultă că:

$$\frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = m(\widehat{OMN}), \text{ adică } m(\widehat{OMN}) = 60^\circ$$

Deoarece toate cele trei unghiuri ale sale au măsura de 60° , rezultă că triunghiul OMN este echilateral, deci:

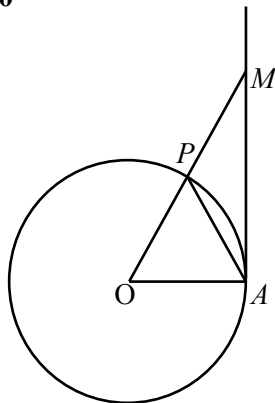
$$ON = MN = 6\sqrt{3} \text{ cm (raza cercului).}$$

Este cunoscut faptul că lungimea înălțimii într-un triunghi echilateral este egală cu $\frac{l\sqrt{3}}{2}$. Calculăm lungimea înălțimii:

$$h = \frac{6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = \frac{18}{2} = 9 \text{ cm.}$$

2. Tangente dintr-un punct exterior la un cerc

Exercițiul 5, pagina 100



Dreapta AM este tangentă la cercul $\mathcal{C}(O, 3 \text{ cm})$ în punctul A , deci este perpendiculară pe raza OA . Rezultă că măsura unghiului $\widehat{OAM}$ este de 90° . Fiind raze ale cercului, segmentele $[OA]$ și $[OP]$ au lungimi egale, $OP = AO = 3 \text{ cm}$.

Știm din ipoteză că $MP = 3 \text{ cm}$. Deoarece punctul P aparține segmentului OM , avem că $OM = OP + PM$. Obținem că $OM = 3 + 3 = 6 \text{ cm}$.

În triunghiul dreptunghic $\triangle OAM$ aplicăm *Teorema lui Pitagora* pentru a calcula lungimea catetei AM :

$$AM^2 + OA^2 = OM^2$$

De unde:

$$AM^2 = 36 \text{ cm}^2 - 9 \text{ cm}^2 = 27 \text{ cm}^2$$

Extragem radical și obținem că:

$$AM = 3\sqrt{3} \text{ cm}.$$

Observăm că $OP = PM$, deoarece OP are lungimea de 3 cm , fiind rază a cercului, iar despre PM știm din ipoteză că are aceeași lungime, 3 cm . Atunci P este mijlocul segmentului OM . În triunghiul dreptunghic $\triangle OAM$ cu măsura unghiului $\widehat{OAM}$ de 90° , OM este ipotenuză cu mijlocul în punctul P . Atunci AP este mediana ipotenuzei, deci are lungimea egală cu jumătate din ipotenuza OM .

Rezultă că:

$$AP = 3 \text{ cm}$$

Am obținut că triunghiul $\triangle OAP$ are laturile egale, cu lungimea 3 cm . Din $AO = OP = AP = 3 \text{ cm}$, rezultă că triunghiul $\triangle OAP$ echilateral. Un triunghi echilateral are unghiurile congruente cu măsura de 60° . Atunci:

$$m(\widehat{OAP}) = 60^\circ$$

Din desen, avem că unghiul $\sphericalangle OAM = \sphericalangle OAP + \sphericalangle MAP$. Putem afla acum măsura unghiului MAP :

$$m(\widehat{MAP}) = m(\widehat{OAM}) - m(\widehat{OAP})$$

Adică:

$$m(\widehat{MAP}) = 90^\circ - 60^\circ$$

Deci:

$$m(\widehat{MAP}) = 30^\circ.$$

4. Lungimea cercului și aria discului

Exercițiul 8, pagina 103

a) Pentru a afla lungimea cercului circumscris pătratului, avem nevoie de raza acestuia. Raza este egală cu jumătate din lungimea unei diagonale a pătratului. Astfel, trebuie să aflăm mai întâi lungimea diagonalei.

Cum perimetrul pătratului este de 12 cm , aflăm că o latura măsoară:

$$\frac{P}{4} = \frac{12\text{ cm}}{4} = 3\text{ cm}$$

Este cunoscut faptul că lungimea diagonalei unui pătrat este egală cu $l\sqrt{2}$. Aplicând formula, aflăm că diagonala măsoară $3\sqrt{2}\text{ cm}$.

Putem calcula acum lungimea razei cercului. Raza cercului circumscris măsoară jumătate din lungimea diagonalei pătratului:

$$r = \frac{3\sqrt{2}}{2}\text{ cm}$$

Lungimea cercului este dată de formula $L = 2\pi r$, de unde obținem că $L = 2 \cdot \pi \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2}\text{ cm} = 3\sqrt{2}\pi\text{ cm}$.

CAPITOLUL III. Asemănarea triunghiurilor

1. Segmente proporționale

Exercițiul 7, pagina 109

Cum $AB = \frac{2}{3}CD$, rezultă că:

$$3AB = 2CD, \text{ adică:}$$

$$CD = \frac{3}{2}AB.$$

Avem că $CD = \frac{3}{2} \cdot 8 \text{ cm}$, deci $CD = \frac{24}{2} \text{ cm}$, adică $CD = 12 \text{ cm}$.

$$BC = AD - AB - CD$$

$$BC = 26 \text{ cm} - 8 \text{ cm} - 12 \text{ cm}$$

$$BC = 18 \text{ cm} - 12 \text{ cm}$$

$$BC = 6 \text{ cm}.$$

Folosindu-ne de *Teorema paralelelor echidistante*, obținem că relația de proporționalitate dintre segmente se păstrează și pe secanta din partea dreaptă. Avem că:

$$A'B' = \frac{2}{3}C'D', \text{ de unde obținem:}$$

$C'D' = \frac{3}{2}A'B'$, deci $C'D' = \frac{3}{2} \cdot 6 \text{ cm}$, adică $C'D' = \frac{18}{2} \text{ cm}$. Putem calcula acum și lungimea lui $C'D' = 9 \text{ cm}$.

Cum raportul de proporționalitate între cele două secante este $\frac{A'B'}{AB} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, obținem că:

$$B'C' = \frac{3}{4} \cdot 6 \text{ cm}, \text{ adică } B'C' = \frac{18}{4} \text{ cm}, \text{ deci } B'C' = 4,5 \text{ cm}.$$

$$A'D' = A'B' + B'C' + C'D'$$

$$A'D' = 6 \text{ cm} + 4,5 \text{ cm} + 9 \text{ cm}$$

$$A'D' = 19,5 \text{ cm}.$$

2. Teorema lui Thales

Exercițiul 12, pagina 112

Cum $AD = 32 \text{ cm}$, iar $AB = 24 \text{ cm}$, punctul D se va situa pe prelungirea laturii AB .

Punctul E se va situa pe prelungirea laturii AC , pentru că DE este paralelă cu BC . Segmentul $BD = AD - AB$, adică $BD = 32 \text{ cm} - 24 \text{ cm}$, deci $BD = 8 \text{ cm}$.

Astfel, putem aplica *Teorema lui Thales* în triunghiul ADE .

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ADE \\ DE \parallel BC \end{array} \right\} \xrightarrow{T.Th.} \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

Obținem: $\frac{32 \text{ cm}}{24 \text{ cm}} = \frac{AE}{36 \text{ cm}}$, de unde rezultă că:

$$AE = \frac{32 \cdot 36 \text{ cm}^2}{24 \text{ cm}}, \text{ adică } AE = \frac{1152 \text{ cm}^2}{24 \text{ cm}}, \text{ deci } AE = 48 \text{ cm}.$$

Așadar, $CE = AE - AC = 48 \text{ cm} - 36 \text{ cm} = 12 \text{ cm}$.

Exercițiul 16, pagina 112

Aplicăm teorema lui Thales în așa fel încât să obținem rapoarte în care cunoaștem lungimile segmentelor.

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC \\ DP \parallel AC \end{array} \right\} \xrightarrow{T.Th.} \frac{BD}{DA} = \frac{BP}{PC}$$

Echivalent cu:

$$\frac{10 \text{ cm}}{x} = \frac{y + 5 \text{ cm}}{10 \text{ cm}}$$

Adică:

$$xy + 5x = 100 \text{ cm}$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC \\ DP \parallel AC \end{array} \right\} \xrightarrow{T.Th.} \frac{BD}{BA} = \frac{BP}{BC}$$

Echivalent cu:

$$\frac{10 \text{ cm}}{10 \text{ cm} + x} = \frac{y + 5 \text{ cm}}{22 \text{ cm}}$$

Adică:

$$(10\text{ cm} + x)(y + 5\text{ cm}) = 220\text{ cm}$$

Am obținut astfel un sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute, pe care îl putem rezolva prin metodele convenționale.

$$\begin{cases} xy = 100\text{ cm} - 5x \\ xy = 170\text{ cm} - 5x - 10y \end{cases}$$

Atunci:

$$100\text{ cm} - 5x = 170\text{ cm} - 5x - 10y$$

$$100\text{ cm} = 170\text{ cm} - 10y$$

$$10y = 70\text{ cm}$$

$$y = 7\text{ cm}$$

Putem calcula și x :

$$12(10\text{ cm} + x) = 220\text{ cm}$$

$$10\text{ cm} + x = 18, (3)\text{ cm}$$

$$x = 8, (3)\text{ cm}$$

3. Linia mijlocie în triunghi. Proprietăți. Centrul de greutate al unui triunghi

Exercițiul 8, pagina 115

Cum M este mijlocul lui AB , rezultă că:

$$MB = \frac{AB}{2}$$

Adică:

$$MB = AM = \frac{12\text{ cm}}{2} = 6\text{ cm}.$$

Cum N este mijlocul lui BC , rezultă că:

$$BN = NC = \frac{BC}{2} = \frac{18\text{ cm}}{2} = 9\text{ cm}.$$

MN este linie mijlocie în triunghiul ABC . Rezultă că:

$$MN = \frac{AC}{2} = \frac{15\text{ cm}}{2} = 7,5\text{ cm}.$$

Așadar, $P_{\triangle BMN} = MB + BN + MN$, adică:

$$P_{\triangle BMN} = 6 \text{ cm} + 9 \text{ cm} + 7,5 \text{ cm} = 22,5 \text{ cm}.$$

$P_{\triangle CNM} = AC + CN + MN + MA$, adică:

$$P_{\triangle CNM} = 15 \text{ cm} + 9 \text{ cm} + 7,5 \text{ cm} + 6 \text{ cm} = 37,5 \text{ cm}.$$

4. Linia mijlocie în trapez. Proprietăți

Exercițiul 11, pagina 117

Presupunem că baza mare este AB , iar baza mică este CD .

Cum MN este linia mijlocie a trapezului, obținem relația:

$$MN = \frac{AB + CD}{2} \quad (1)$$

Cum PQ este segmentul determinat de mijloacele diagonalelor trapezului, obținem relația:

$$PQ = \frac{AB - CD}{2} \quad (2)$$

Adunăm cele două relații și obținem:

$$MN + PQ = \frac{AB + CD + AB - CD}{2}$$

$$MN + PQ = \frac{2AB}{2}$$

$$MN + PQ = AB$$

Înlocuim segmentele cunoscute și obținem:

$$18 \text{ cm} + 6 \text{ cm} = AB, \text{ adică } AB = 24 \text{ cm}.$$

Înlocuim AB în oricare dintre cele două relații. Spre exemplu, o înlocuim în prima relație și obținem:

$$MN = \frac{AB + CD}{2}, \text{ adică } 18 \text{ cm} = \frac{24 \text{ cm} + CD}{2}, \text{ de unde obținem:}$$

$$36 \text{ cm} = 24 \text{ cm} + CD, \text{ adică } CD = 36 \text{ cm} - 24 \text{ cm}, \text{ deci } CD = 12 \text{ cm}.$$

5. Triunghiuri asemenea. Proprietăți. Teorema fundamentală a asemănării

Exercițiul 6, pagina 119

Cum triunghiurile ABC și DEF sunt asemenea, rezultă că laturile lor omoloage sunt proportionale și formează rapoarte egale. Prima oară selectăm laturile de lungime mai mică și formăm rapoarte între ele. În cazul nostru, presupunem că latura $DE = 4\text{ cm}$. Obținem astfel perechea de laturi omoloage DE și AB (fiind cele mai mici). În continuare, presupunem că laturile EF și BC sunt omoloage, iar FD și CA , de asemenea, omoloage. Astfel, obținem raportul de asemănare:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$$

Înlocuim laturile cunoscute și obținem:

$$\frac{16}{4} = \frac{20}{EF} = \frac{18}{FD} \quad (1)$$

Din primii doi termeni ai relației (1) putem obține latura EF . Avem:

$$\frac{16}{4} = \frac{20}{EF}$$

De aici, efectuând produsul mezilor și al extremilor, obținem:

$$4 \cdot 20 = 16 \cdot EF, \text{ adică:}$$

$$EF = \frac{4 \cdot 20}{16}, \text{ adică } EF = 5\text{ cm}.$$

Selectăm acum primul și ultimul termen al relației (1) și obținem:

$$\frac{16}{4} = \frac{18}{FD}$$

De aici, efectuând produsul mezilor și al extremilor, obținem:

$$4 \cdot 18 = 16 \cdot FD, \text{ adică:}$$

$$FD = \frac{4 \cdot 18}{16}, \text{ adică } FD = \frac{18^{(2)}}{4} = \frac{9}{2} = 4,5\text{ cm}.$$

Prin urmare, $P_{\triangle DEF} = DE + EF + FD = 4\text{ cm} + 5\text{ cm} + 4,5\text{ cm} = 13,5\text{ cm}$.

6. Criterii de asemănare a triunghiurilor

Exercițiul 4, pagina 124

a) În $\triangle ABC$ se cunosc $m(\hat{A}) = 51^\circ$ și $m(\hat{C}) = 56^\circ$. Putem afla imediat și mărimea unghiului $\hat{B}$, știind că suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este egală cu 180° . Obținem relația:

$$m(\hat{B}) = 180^\circ - m(\hat{A}) - m(\hat{C})$$

$$m(\hat{B}) = 180^\circ - 51^\circ - 56^\circ$$

$$m(\hat{B}) = 129^\circ - 56^\circ$$

$$m(\hat{B}) = 73^\circ$$

Se observă că între cele două triunghiuri avem perechile de unghiuri congruente:

$$\hat{B} \equiv \hat{F}$$

și

$$\hat{C} \equiv \hat{E}$$

Astfel, putem aplica criteriul $U. U.$ și obținem că triunghiurile sunt asemenea.

Exercițiul 5, pagina 124

a) Verificăm dacă raportul laturilor este constant. Astfel:

$$\frac{AB}{MP} = \frac{8}{14} \stackrel{(2)}{=} \frac{4}{7} \text{ și } \frac{BC}{MN} = \frac{12}{21} \stackrel{(3)}{=} \frac{4}{7}$$

Cum și $\hat{B} \equiv \hat{M}$, putem aplica criteriul $L. U. L.$ și obținem că triunghiurile sunt asemenea.

Exercițiul 6, pagina 124

a) Verificăm dacă raportul laturilor este constant. Astfel:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{9}{12} \stackrel{(3)}{=} \frac{3}{4}$$

și

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{12}{16} \stackrel{(4)}{=} \frac{3}{4}$$

și

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{15}{20} \stackrel{(5)}{=} \frac{3}{4}$$

Astfel, aplicând criteriul $L. L. L.$, obținem că triunghiurile sunt asemenea.

Capitolul IV. Relații metrice în triunghiul dreptunghic

2. Teorema înălțimii. Teorema catetei.

Exercițiul 2, pagina 133

a) Știm din ipoteză că $[MA] \perp [PQ]$. Rezultă de aici că MA este înălțime în triunghiul MPQ .

Aplicăm relația *Reciprocei Teoremei Înălțimii* (*R.T.I.*). Astfel, verificăm dacă este adevărată relația:

$$MA^2 = PA \cdot AQ.$$

$$MA^2 = 4^2 = 16 \text{ cm}$$

și

$$PA \cdot AQ = 2 \cdot 8 = 16 \text{ cm}$$

Cum relația este adevărată, rezultă, conform *R.T.I.*, că triunghiul MPQ este dreptunghic, cu $m(\widehat{PMQ}) = 90^\circ$.

Exercițiul 4, pagina 134

a) Exercițiul se rezolvă aplicând *Teorema Catetei* (*T.C.*). Astfel, se va verifica faptul că:

$$\sqrt{AQ \cdot PQ} = \sqrt{12 \cdot 14} = 2\sqrt{42} = MQ$$

Cum această relație este adevărată, rezultă că triunghiul MPQ este dreptunghic, cu $m(\widehat{PMQ}) = 90^\circ$.

3. Teorema lui Pitagora. Reciproca teoremei lui Pitagora.

Exercițiul 1, pagina 136

a) Cum triunghiul este dreptunghic, iar lungimile catetelor sunt cunoscute, putem aplica *Teorema lui Pitagora* pentru a obține lungimea ipotenuzei. Astfel, conform acesteia, avem:

$$6^2 + 8^2 = (\text{ipotenuza})^2, \text{ adică:}$$

$$36 + 64 = (\text{ipotenuza})^2, \text{ deci:}$$

$$100 = (\text{ipotenuza})^2. \text{ De aici rezultă că:}$$

$$\text{ipotenuza} = \sqrt{100} = 10 \text{ cm.}$$

Exercițiul 8, pagina 137

a) Vom verifica ipotezele *Reciprocei Teoremei lui Pitagora*. În cazul în care triunghiul ar fi dreptunghic, latura cea mai mare ar fi ipotenuza. Astfel, avem de verificat relația:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

Așadar:

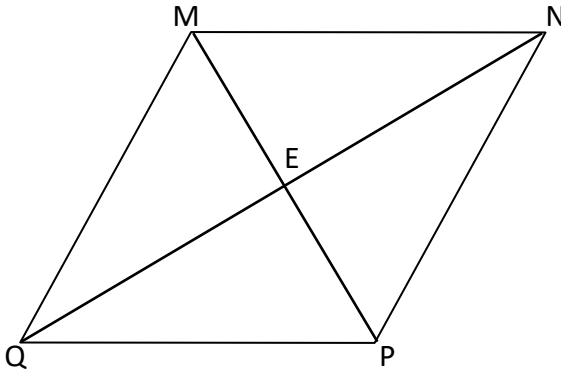
$$AB^2 + BC^2 = 15^2 + 20^2 = 225 + 400 = 625$$

și

$$AC^2 = 25^2 = 625$$

Conform *Reciprocei Teoremei lui Pitagora*, triunghiul este dreptunghic, cu $m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$.

Exercițiul 17, pagina 137



Notăm cu E intersecția diagonalelor MP și NQ ale paralelogramului MNPQ. Din proprietățile paralelogramului, știm că punctul E este mijlocul segmentelor MP și NQ. Cunoaștem lungimile diagonalelor din ipoteză, $MP = 180\text{cm}$, iar $NQ = 240\text{cm}$. Atunci:

$$ME = 90\text{cm}$$

$$NE = 120\text{cm}$$

În triunghiul MEN, cunoaștem lungimile tuturor celor trei laturi. Verificăm dacă se respectă Reciproca Teoremei lui Pitagora, alegând laturile în așa fel încât să respectăm faptul că ipotenuza unui triunghi dreptunghic are lungimea cea mai mare dintre cele trei laturi:

$$\text{Oare } MN^2 = ME^2 + NE^2 ? \text{ Verificăm:}$$

$$22500 \text{ cm}^2 = 8100 \text{ cm}^2 + 14400 \text{ cm}^2$$

$$22500 \text{ cm}^2 = 22500 \text{ cm}^2$$

Am demonstrat, cu ajutorul Reciprocei Teoremei lui Pitagora, faptul că triunghiul MEN este dreptunghic, cu măsura unghiului MEN de 90° .

Avem că:

$$MNPQ \text{ paralelogram}$$

$$MP \perp NQ$$

Fiind un paralelogram cu diagonalele perpendiculare, MNPQ este romb. MNPQ nu poate fi pătrat, deoarece are diagonalele de lungimi diferite.

Deoarece MNPQ este romb, acesta are toate laturile egale. Perimetrul său este:

$$P_{MNPQ} = 150 \text{ cm} \cdot 4 = 600 \text{ cm}$$

Aria rombului MNPQ este egală cu jumătate din produsul diagonalelor:

$$A_{MNPQ} = \frac{150 \text{ cm} \cdot 240 \text{ cm}}{2} = 21600 \text{ cm}^2$$

4. Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic

Exercițiul 3, pagina 143

Pentru a afla rapoartele cerute, vom avea nevoie și de lungimea ipotenuzei. Știm din ipoteză că triunghiul ABC este dreptunghic în punctul $\hat{A}$, așa că aplicăm *Teorema lui Pitagora* și obținem:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2, \text{ adică:}$$

$$(9 \text{ cm})^2 + (12 \text{ cm})^2 = 81 \text{ cm}^2 + 144 \text{ cm}^2 = 225 \text{ cm}^2 = BC^2$$

Cum $BC > 0$, rezultă că:

$$BC = \sqrt{225 \text{ cm}^2} = 15 \text{ cm}.$$

Astfel,

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{12 \text{ cm}}{15 \text{ cm}} = \frac{4}{5}$$

$$\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{9 \text{ cm}}{15 \text{ cm}} = \frac{3}{5}$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{AC}{AB} = \frac{12 \text{ cm}}{9 \text{ cm}} = \frac{4}{3}$$

$$\operatorname{ctg} B = \frac{AB}{AC} = \frac{9 \text{ cm}}{12 \text{ cm}} = \frac{3}{4}$$

Exercițiul 6, pagina 143

a) $\frac{1 - \sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

Într-o egalitate de rapoarte, produsul mezilor este egal cu produsul extremilor. Atunci:

$$(1 - \sin x)(1 + \sin x) = \cos x \cdot \cos x$$

Aplicăm în partea stângă a egalității formula de calcul prescurtat $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ și obținem:

$$1 - \sin^2 x = \cos^2 x$$

Adunăm $\sin^2 x$ la ambii membri ai egalității și obținem:

$$1 - \sin^2 x + \sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x$$

Adică:

$$1 = \cos^2 x + \sin^2 x$$

Relație adevărată, numită *Teorema fundamentală a Trigonometriei*. Se demonstrează cu ajutorul *Teoremei lui Pitagora*.

f) $\sin^2 x (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) = \operatorname{tg} x$

Pornim de la relația din partea stângă a egalității și încercăm să ajungem la rezultatul $\operatorname{tg} x$, folosind proprietăți ale elementelor de trigonometrie implicate în egalitate.

$$\sin^2 x (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)$$

Desfacem parantezele:

$$\sin^2 x \cdot \operatorname{tg} x + \sin^2 x \cdot \operatorname{ctg} x$$

Folosim definiția tangentei și cotangentei pentru a le scrie sub formă de raport de sinus și cosinus:

$$\sin^2 x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} + \sin^2 x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$$

Efectuăm înmulțirile și obținem:

$$\frac{\sin^3 x}{\cos x} + \frac{\sin^2 x \cdot \cos x}{\sin x}$$

Simplificăm al doilea termen al sumei cu $\sin x$:

$$\frac{\sin^3 x}{\cos x} + \sin x \cdot \cos x$$

Aducem la același numitor, și anume $\cos x$:

$$\frac{\sin^3 x}{\cos x} + \frac{\sin x \cdot \cos^2 x}{\cos x}$$

Dăm factor comun pe $\sin x$:

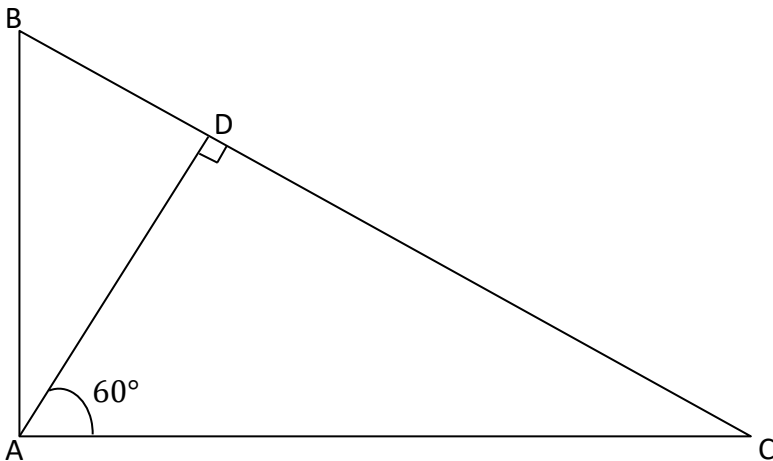
$$\frac{\sin x (\sin^2 x + \cos^2 x)}{\cos x}$$

Aplicăm *Teorema fundamentală a trigonometriei* și obținem:

$$\frac{\sin x}{\cos x}$$

Adică $\tan x$, demonstrând astfel egalitatea cerută.

Exercițiul 10, pagina 144



Cosinusul unghiului $\widehat{DAC}$ este:

$$\cos(\widehat{DAC}) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

În triunghiul dreptunghic $\triangle DAC$, $\cos(\widehat{DAC}) = \frac{AD}{AC}$. Știm din ipoteză că $AD = 12\text{ cm}$.

Din rezultatul anterior, avem că:

$$\frac{12\text{ cm}}{AC} = \frac{1}{2}$$

Produsul mezilor este egal cu produsul extremilor, obținem:

$$AC = 24\text{ cm}$$

Aplicăm *Teorema lui Pitagora* în triunghiul dreptunghic $\triangle DAC$:

$$DC^2 = AC^2 - AD^2$$

Adică:

$$DC^2 = 576\text{ cm} - 144\text{ cm} = 432\text{ cm}$$

Extragem radical și obținem:

$$DC = 12\sqrt{3}\text{ cm}$$

Aplicăm *Teorema catetei* în triunghiul dreptunghic $\triangle BAC$ pentru cateta AC .

Obținem:

$$AC = \sqrt{DC \cdot BC}$$

Ridicăm la pătrat:

$$AC^2 = DC \cdot BC$$

Înlocuim cu valorile cunoscute:

$$576\text{ cm} = 12\sqrt{3}\text{ cm} \cdot BC$$

Obținem:

$$BC = 16\sqrt{3}\text{ cm}$$

Aplicăm *Teorema lui Pitagora* în triunghiul dreptunghic $\triangle BAC$:

$$BA^2 = BC^2 - AC^2$$

Adică:

$$BA^2 = 768\text{ cm}^2 - 576\text{ cm}^2 = 192\text{ cm}^2$$

Extragem radical:

$$AB = 8\sqrt{3}\text{ cm}$$

Putem calcula acum perimetrul triunghiului $\triangle BAC$:

$$P_{ABC} = 8\sqrt{3} \text{ cm} + 16\sqrt{3} \text{ cm} + 24 \text{ cm} = 24\sqrt{3} + 24 \text{ cm}$$

5. Rezolvarea triunghiului dreptunghic. Calculul elementelor (latură, apotemă, arie, perimetru) în triunghiul echilateral, în pătrat și în hexagonul regulat. Aproximarea în situații practice a distanțelor folosind relații metrice

Exercițiul 1, pagina 144

a) Se dau în ipoteză atât formula de calcul a ariei triunghiului $A_{\triangle ABC} = \frac{BC \cdot AB \cdot \sin(\widehat{ABC})}{2}$, cât și lungimile laturilor BC , AB și valoarea raportului $\sin(\widehat{ABC})$. Înlocuim în formulă cu valorile corespunzătoare și obținem:

$$A_{\triangle ABC} = \frac{BC \cdot AB \cdot \sin(\widehat{ABC})}{2}$$

Înlocuim:

$$A_{\triangle ABC} = \frac{15 \text{ cm} \cdot 12 \text{ cm} \cdot \frac{3}{5}}{2}$$

Echivalent cu:

$$A_{\triangle ABC} = \frac{180 \text{ cm}^2 \cdot \frac{3}{5}}{2}$$

Simplificăm raportul de la numărător:

$$A_{\triangle ABC} = \frac{36 \text{ cm}^2 \cdot 3}{2}$$

Obținem:

$$A_{\triangle ABC} = 54 \text{ cm}^2.$$

e) Ipoteza exercițiului precizează atât formula de calcul a ariei triunghiului $A_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot BC \cdot \sin(\widehat{BAC})}{2}$, cât și lungimile laturilor AC , BC și valoarea raportului $\sin(\widehat{BAC})$. Înlocuim în formulă cu valorile corespunzătoare și obținem:

$$A_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot BC \cdot \sin(\widehat{BAC})}{2}$$

Înlocuim:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{15 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm} \cdot \frac{5}{6}}{2}$$

Echivalent cu:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{300 \text{ cm}^2 \cdot \frac{5}{6}}{2}$$

Simplificăm raportul de la numărător:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{50 \text{ cm}^2 \cdot 5}{2}$$

Obținem:

$$A_{\Delta ABC} = 125 \text{ cm}^2.$$

Exercițiul 6, pagina 146

Vrem să calculăm tangenta unghiului $\widehat{ABD}$ în triunghiul ΔADB , dreptunghic în $\hat{A}$. Deoarece tangenta unui unghi este egală cu raportul $\frac{\text{cateta opusă unghiului}}{\text{cateta alăturată unghiului}}$, deducem că trebuie să aflăm lungimile laturilor DA și AB . Știm din ipoteză că $AD = 3a$, ne mai rămâne de calculat doar lungimea lui AB . Notăm cu E proiecția vârfului C pe baza AB . Avem:

$AECD$ dreptunghi, cu laturile AD și CE paralele și congruente, deci:

$$CE = 3a.$$

În triunghiul ΔCEB , $m(\widehat{CEB}) = 90^\circ$. Știm că ipotenuza $CB = 5a$, iar cateta $CE = 3a$. Aplicăm Teorema lui Pitagora pentru a calcula lungimea catetei EB :

$$CE^2 + EB^2 = CB^2, \text{ adică:}$$

$$EB^2 = CB^2 - CE^2, \text{ deci:}$$

$$EB^2 = 25a^2 - 9a^2. \text{ De aici rezultă că:}$$

$$EB = \sqrt{16a^2} = |4a| = 4a.$$

Putem calcula acum lungimea laturii AB , se vede din desen că $AB = AE + EB$. Din $AECD$ dreptunghi cu AE paralel, congruent cu DC și $DC = a$ (ipoteză), avem că $AE = a$. Atunci:

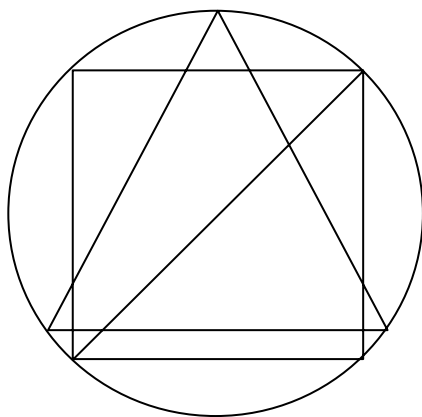
$$AB = a + 4a = 5a.$$

Continuăm rezolvarea problemei în triunghiul $\triangle ABD$, dreptunghic în $\hat{A}$. Cunoaștem acum lungimile ambelor catete ale triunghiului, așa că putem calcula valoarea tangentei unghiului $\widehat{ABD}$.

$$\operatorname{tg}(\widehat{ABD}) = \frac{AD}{AB} = \frac{3a}{5a} = \frac{3}{5}$$

Am reușit să demonstrăm faptul că valoarea tangentei unghiului $\widehat{ABD}$ nu depinde de valoarea lui a .

Exercițiul 16, pagina 147



Aria triunghiului echilateral se calculează cu formula $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$. Știm din ipoteză că aria triunghiului echilateral dat este de $9\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Atunci:

$$\frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Adică:

$$l^2\sqrt{3} = 36\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Deci:

$$l = 6 \text{ cm}$$

Latura triunghiului echilateral înscris în cerc este egală cu 6 cm . Putem acum calcula raza cercului, știind că într-un triunghi echilateral, lungimea laturii este egală cu lungimea razei cercului circumscris înmulțită cu $\sqrt{3}$.

$$l = R\sqrt{3}, \text{ deci } R = \frac{l\sqrt{3}}{3}. \text{ Atunci } R = 2\sqrt{3} \text{ cm}.$$

Diagonala pătratului înscris în cerc este egală cu dublul razei cercului. Atunci diagonala = $4\sqrt{3} \text{ cm}$.

Se calculează acum latura pătratului, știind că lungimea diagonalei este egală cu lungimea laturii înmulțită cu $\sqrt{2} \text{ cm}$:

$$l = \frac{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{6} \text{ cm}$$

Aria pătratului este egală cu pătratul lungimii laturii. Calculăm:

$$Aria = l^2 = (2\sqrt{6})^2 \text{ cm}^2$$

Deci:

$$Aria = 24 \text{ cm}^2 .$$